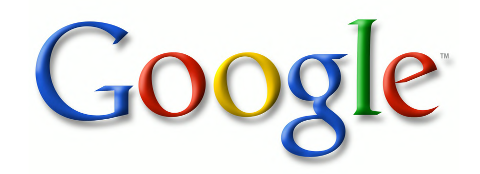
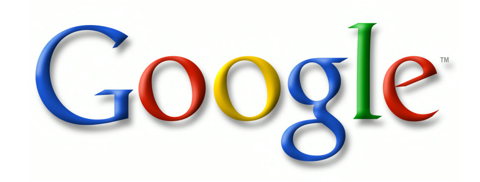
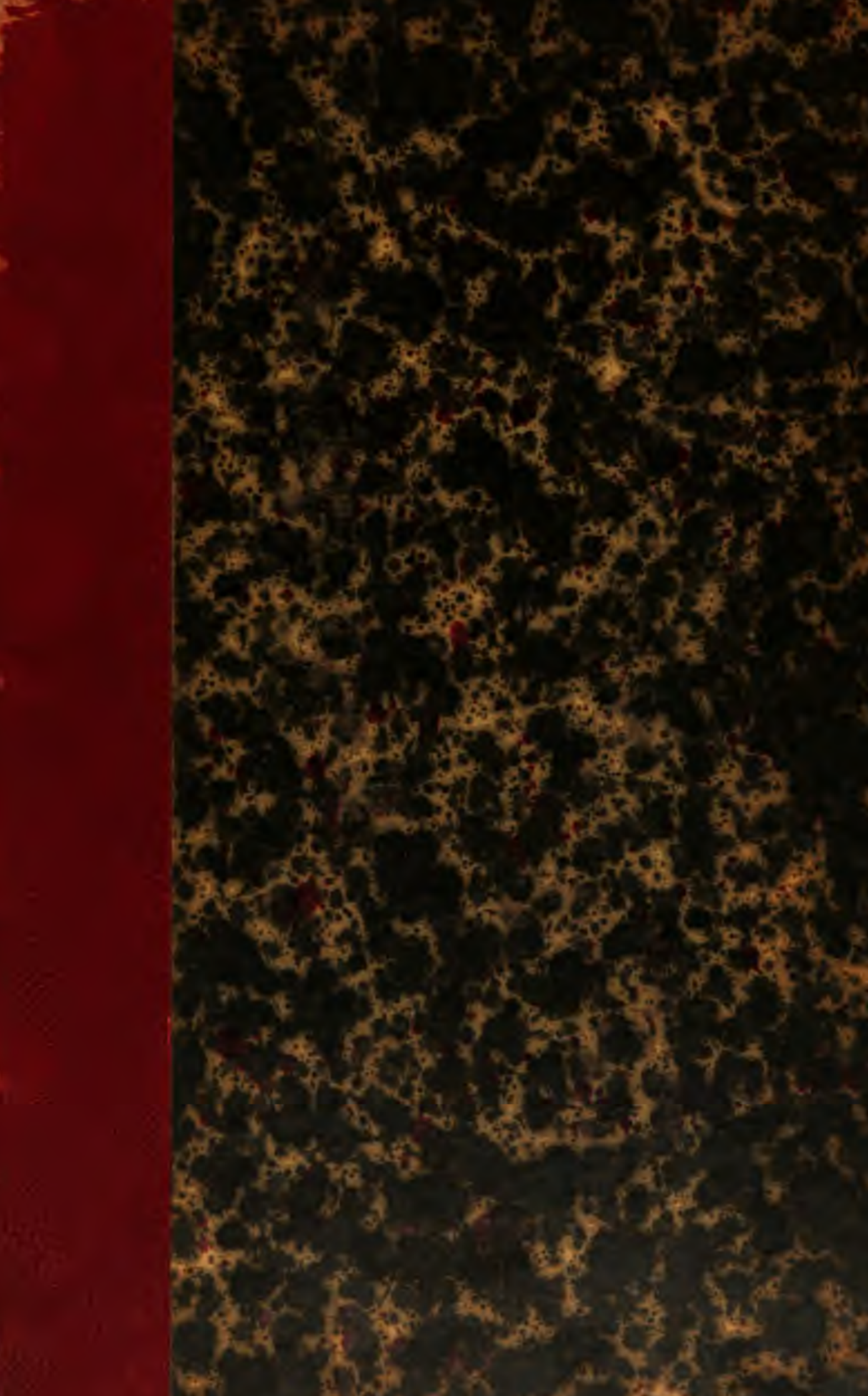
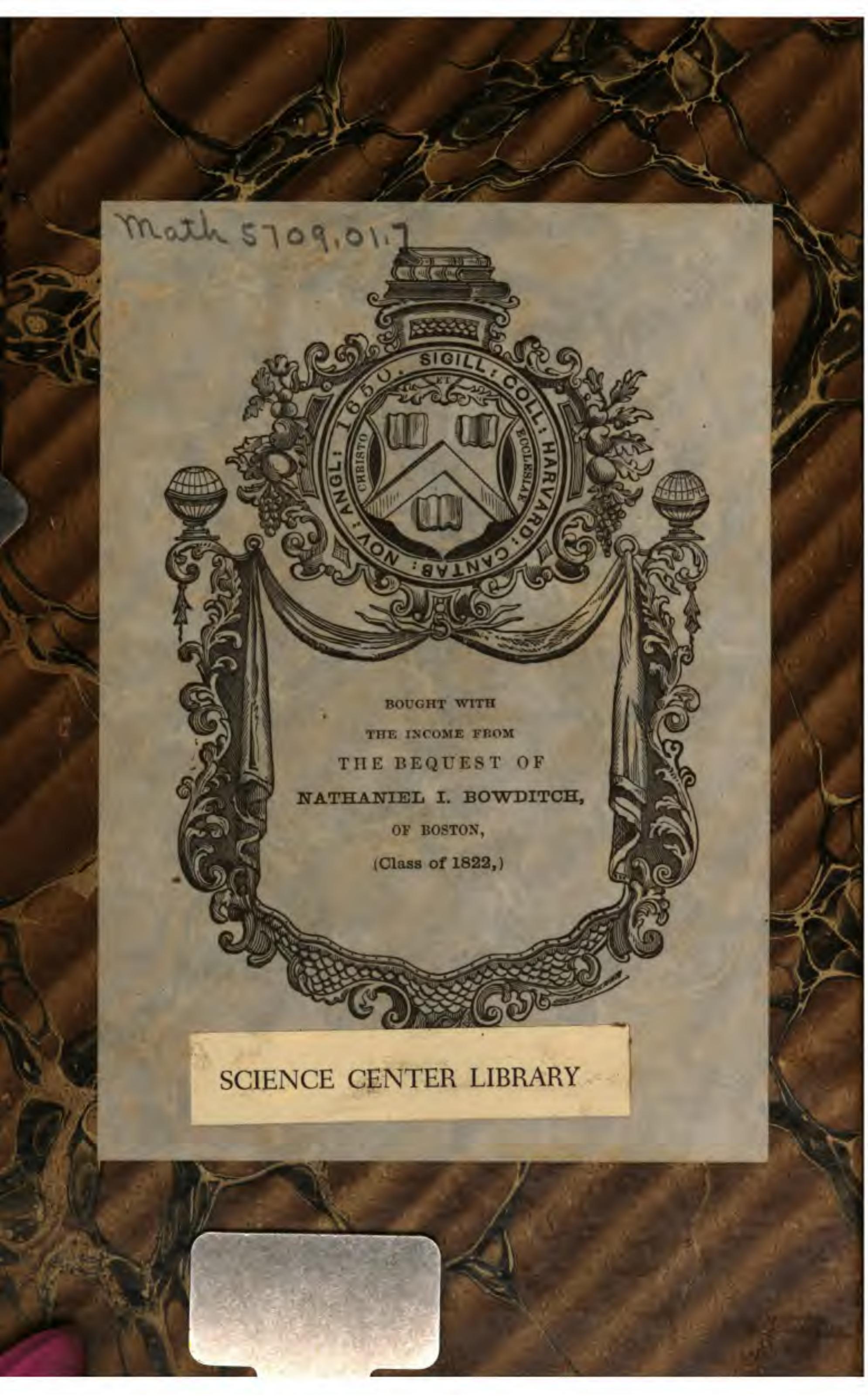










GÉOMÉTRIE COTÉE

A L'USAGE

des Candidats aux Écoles du Gouvernement

PAR MM.

ÉMILE MARTIN
Ancien élève de l'École polytechnique,
Professeur de spéciales à l'école
Sainte-Geneviève,
Ancien professeur de spéciales au collège
Sainte-Barbe.

FÉLIX PERNOT
Ancien élève
de l'École polytechnique,
Professeur de mathématiques
spéciales
à l'école Sainte-Geneviève.



PARIS
C. NAUD, ÉDITEUR
3, RUE RACINE 3,

1903

GÉOMÉTRIE COTÉE

GÉOMÉTRIE COTÉE

A L'USAGE

des Candidats aux Écoles du Gouvernement

PAR MM.

ÉMILE MARTIN
Ancien élève de l'École polytechnique.
Professeur de spéciales à l'école
Sainte-Geneviève.
Ancien professeur de spéciales au collège
Sainte-Barbe.

FÉLIX PERNOT
Ancien élève
de l'École polytechnique,
Professeur de mathématiques
spéciales
à l'école Sainte-Geneviève.



PARIS
C. NAUD, ÉDITEUR
3, RUE RACINE, 3

1903

NOTE DES AUTEURS

Nous avons tenu à faire paraître un cours complet de Géométrie cotée qui pût convenir à la fois pour la préparation à toutes les grandes écoles de l'État. Les candidats à l'École polytechnique et à l'École centrale devront étudier le volume au complet; les candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr pourront se contenter, vu le programme actuel, des chapitres relatifs à la droite et au plan (p. 1 à 152), du chapitre relatif aux polyèdres (p. 195), du chapitre où l'on traite des contours apparents des cônes et cylindres de révolution (p. 158), enfin du chapitre relatif à la sphère (p. 176) y compris la section plane de la sphère.

GÉOMÉTRIE COTÉE

PRÉLIMINAIRES

DÉFINITIONS. — La Géométrie descriptive a pour but de ramener à des constructions qu'on puisse effectuer sur un plan, la résolution des problèmes qui se posent dans la représentation et l'étude des corps.

Pour y arriver, on emploie divers procédés, tous fondés sur la méthode des projections.

Projections. — On appelle *projection cylindrique* orthogonale d'un point sur un plan le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan.

Le plan prend le nom de *plan de projection*, et la perpendiculaire celui de *projetante*.

Ce mode de projection, que nous emploierons le plus souvent, est un cas particulier de la *projection conique* ou *centrale*, dans laquelle les projetantes passent par un point fixe. Si le centre de projection s'éloigne à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan, on retrouve la projection cylindrique orthogonale [1]. Dans le cas où les projetantes ne sont pas perpendiculaires au plan, la projection cylindrique est dite *oblique*.

---

(1) Nous appelons *point à l'infini* dans une direction donnée le point commun à toutes les droites parallèles à cette direction.

REPRÉSENTATION DU POINT

Il suffit, dans ce cas, pour fixer la position du point par rapport au plan, de donner sa projection et sa distance au plan. Cette distance, qui s'appelle la *cote* du point, peut être représentée soit graphiquement par la longueur d'un segment, soit à l'aide du nombre inscrit à côté de la projection du point. Ce dernier système est désigné sous le nom de *Géométrie cotée*. Il ne diffère du premier, au point de vue théorique, que par l'introduction de quelques conventions qui facilitent, dans certains cas, l'exécution mécanique des constructions.

Ces procédés nécessitent la construction, sur le plan, d'une *échelle* qui indique le rapport des lignes de la figure à celles de l'espace.

Un point est dit *à cote ronde* lorsque sa cote est exprimée par un nombre entier.

NOTATIONS. — Nous désignerons toujours par des lettres majuscules, A, B, C, par exemple, les points de l'espace; les projections seront indiquées par des lettres minuscules, à côté desquelles sera inscrite la cote du point de l'espace par rapport au plan de projection.

Ainsi, *a* (5,4) indiquera que la cote du point A est égale à la longueur figurée par le nombre 5,4 sur l'échelle du dessin.

Plan de comparaison. — On désigne ainsi le plan, perpendiculaire aux projetantes, par rapport auquel on mesure les cotes. On peut le choisir arbitrairement, puisque les positions relatives des projections restent les mêmes quand le plan de projection, dit plan

horizontal, se déplace parallèlement à lui-même. On prend un plan de comparaison tel qu'au début du problème, tout au moins, il n'y ait que des cotes positives, mais rien n'empêche, pour simplifier une construction particulière, de mesurer toutes les cotes par rapport à un autre plan horizontal.

Echelle. — L'échelle du dessin est une ligne, tracée au bas de la feuille, sur laquelle sont marquées des divisions égales, fixant la longueur conventionnelle qui représente, sur le dessin, l'unité de longueur, le mètre. Si l'une de ces divisions est égale à o m. oo3, on dit que le dessin est à l'échelle de 3/1000; on a soin de subdiviser l'intervalle le plus à gauche en dix parties ou plus, de manière à pouvoir évaluer les sous-unités.

Les échelles les plus employées pour les épures sont celles de 1/100 ou 1/200; elles permettent de se servir du double décimètre; par exemple, si l'on donne $ab = 17$ m. 5, à l'échelle de 1/100, on prendra $ab = 175$ mm. sur le dessin ; au 1/200, on prendrait $ab = 87$ mm 1/2.

REPRÉSENTATION DE LA DROITE

Si de tous les points de la droite AB de l'espace on abaisse des perpendiculaires sur le plan de projection, elles sont toutes dans un même plan, mené par la droite perpendiculairement au plan de projection (*plan projetant*).

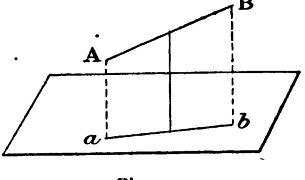


Fig. 1.

L'intersection des deux plans définit une droite ab

qui est le lieu des projections des différents points de la droite, c'est-à-dire la projection de la droite. La projection de AB est donc une droite *ab* (fig. 1) dont on connaît les cotes des différents points.

Inversement, si l'on donne une droite *ab* avec la cote de deux points projetés en *a* et *b*, *ab* représente une droite de l'espace et une seule. En effet, le point A et le point B de l'espace sont parfaitement définis par leurs projections *a*, *b*, et leurs cotes, supposées données; or, deux points A et B définissent une droite AB et une seule.

Cas particuliers. — Si la droite est parallèle au plan de projection, c'est-à-dire *horizontale*, tous les points de la projection auront la même cote; la réciproque est évidemment vraie.

Une droite perpendiculaire au plan de projection se projette suivant un point, intersection de la droite et du plan, puisque toutes les perpendiculaires abaissées des points de la droite sur le plan horizontal se confondent avec la droite elle-même.

Un point unique, avec deux cotes, soit graphiques, soit numériques, représente donc une droite perpendiculaire au plan de projection en ce point.

Intervalle. — Pente. — La droite de l'espace étant représentée par sa projection, droite qui joint les projections de ses points, à côté desquels sont inscrites des cotes numériques (fig. 2), on appelle *intervalle* la distance qui sépare sur l'épure les projections de deux points à cote ronde, dont la distance

0 1 2 3 4 5 6
a b

Fig. 2.

verticale est égale à l'unité choisie, généralement 1 mètre. Une droite se trouve ainsi déterminée par la projection d'un point coté et par l'intervalle, puisque cela revient à se donner deux points, à condition d'indiquer dans quel sens vont les cotes sur la projection donnée.

Le point de la droite dont la cote est nulle s'appelle la *trace* de la droite sur le plan horizontal de comparaison.

On désigne sous le nom de *pente* la tangente trigonométrique de l'angle que fait la droite avec le plan de projection, c'est-à-dire de l'angle aigu de la droite avec sa projection.

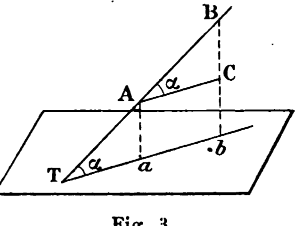


Fig. 3.

Prenons deux points A et B distants verticalement de 1 mètre. Menons par le point A une parallèle AC au plan horizontal (fig. 3) ; l'angle BAC est égal à l'angle α que fait la droite avec le plan de projection. On a donc pour expression de la pente :

$$p = \text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}, \quad \text{et comme} \quad AC = ab, \ \text{tg}\alpha = \frac{BC}{ab}.$$

BC étant par hypothèse égale à l'unité, *ab* se trouve être, par définition, l'intervalle de la droite que nous désignerons par *i*. Cet intervalle est le même quels que soient les points A et B choisis pourvu que la différence de leur cotes soit l'unité. On a donc :

$$p = \frac{1}{i},$$

ce qu'on exprime en disant :

La pente est l'inverse de l'intervalle.

Se donner la pente revient à se donner l'intervalle ; une droite de l'espace est alors bien déterminée par sa projection, la cote d'un point et la pente.

Graduation. — Graduer une droite, c'est déterminer les points à cote ronde.

Droite horizontale. — Une telle droite est représentée par sa projection, avec une seule cote inscrite parallèlement à cette projection. Dans ce cas, la pente de la droite est nulle ; il n'y a pas d'intervalle fini ; la formule $p = \frac{1}{i}$ s'applique encore.

REPRÉSENTATION D'UNE COURBE

Définitions. — Une courbe est dite *plane* lorsque tous ses points sont dans un même plan; elle est *gauche* dans le cas contraire.

On appelle *tangente* à une courbe en un point M la limite MT des positions successives d'une sécante MM' passant par le point, lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M (fig. 4). En géométrie pure, il est nécessaire de prouver, pour chaque courbe étudiée, l'existence de cette limite, démontrée en général, sous certaines réserves, en géométrie analytique.

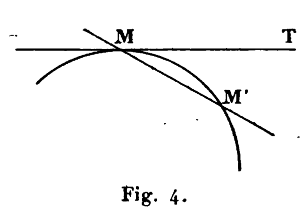


Fig. 4.

Projection d'une courbe. — La projection d'une courbe est le lieu des projections de ses points. L'ensemble des projetantes forme une surface qu'on nomme *cylindre projetant* la courbe. La courbe de l'espace est tracée sur ce cylindre.

Tangente. — THÉORÈME. — Si la tangente MT à une courbe en un point M existe et n'est pas une projetante, la projection *mt* de cette droite est tangente à la projection de la courbe.

Soit MM' une sécante projetée suivant *mm'* (fig. 5). Si M' se rapproche indéfiniment du point M, en même temps le point *m'* se rapproche indéfiniment de *m*, *mm'* restant toujours la projection de MM';

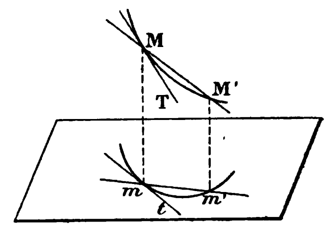


Fig. 5.

Si MM' a une limite, *mm'* en a une qu'elle atteint en même temps, et qui est la tangente en *m*. Si donc MT a pour projection une droite, cette droite sera la tangente *mt* à la projection de la courbe.

Cas où la tangente de l'espace se confond avec la projetante du point. — Dans ce cas, cherchons vers quelle limite tend le plan M*m* M'*m'* (fig. 6), lorsque M' se rapproche indéfiniment de M.

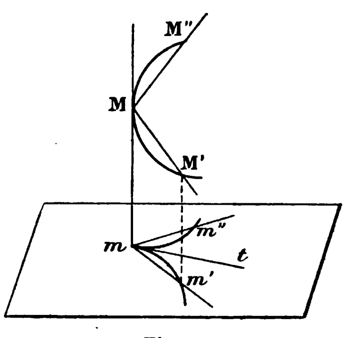


Fig. 6.

L'intersection de ce plan, à la limite, avec le plan de projection, donnera la tangente *mt* à la projection de la courbe.

Ce plan contient la tangente M*m* en M à la courbe de l'espace, et le point M'. Lorsque M' se rapproche indéfiniment de M, ce plan tend, en général, vers une

limite qu'on appelle *plan osculateur* à la courbe en M.

Il faut prouver l'existence de ce plan pour chaque courbe gauche en particulier. On démontre, en géométrie infinitésimale, que ce plan a la même limite que celui mené par Mm parallèlement à la tangente en M'; la démonstration nous entraînerait trop loin.

La trace mt de ce plan sur le plan de projection est la tangente en m à la projection de la courbe.

Les points M' et M'' se projetant de part et d'autre de la tangente mt, la projection présente, en général, ce qu'on appelle un *point de rebroussement.*

REPRÉSENTATION DU PLAN

Conditions qui déterminent un plan. — On démontre, en géométrie, que trois points, deux droites qui se coupent ou deux droites parallèles, un point et une droite, déterminent un plan.

On représente toujours un plan par la projection graduée de sa *ligne de plus grande pente*; on appelle ainsi la droite menée dans le plan perpendiculairement aux horizontales; la projection de cette droite s'appelle l'*échelle de pente* du plan; on la représente par deux traits parallèles d'inégale épaisseur.

La projection de la ligne de plus grande pente est perpendiculaire aux projections des horizontales du plan. Cette propriété résulte d'un théorème général que nous allons démontrer.

Remarquons qu'un angle droit peut se projeter sur un plan suivant un angle donné quelconque.

Soit dans le plan de projection un angle quelconque aob (fig. 7). Menons les plans P et Q perpendiculaires par oa et ob; prenons dans l'un d'eux, P, une droite

quelconque A et par le point O menons un plan R perpendiculaire sur cette droite. Il coupe le plan Q suivant OB. L'angle droit AOB se projette suivant l'angle donné *aob*.

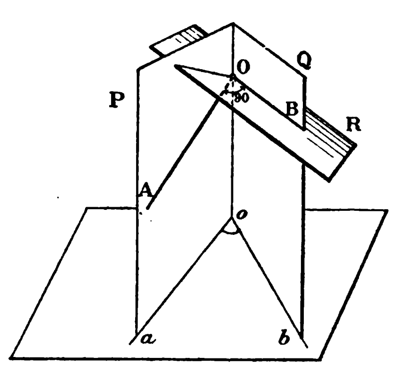


Fig. 7.

On peut, du reste, se rendre compte, à l'inspection d'une simple figure, que la projection de l'angle droit peut varier de o à 180° (fig. 8).

L'angle droit CAB se projette en C*a*B. La perpendiculaire A*o* sur BC se projette suivant la perpendiculaire *ao* sur BC; on a $oa < oA$, d'où les relations suivantes entre les angles :

$$CaB > CAB \qquad Cad < CAD.$$

Si l'on fait tourner le plan de l'angle droit autour de BC, on voit que, lorsque le plan coïncide avec le plan de projection, les deux angles C*a*B, C*ad* sont droits; puis l'un augmente, l'autre diminue et, lorsque le plan de l'angle est perpendiculaire au plan de projection, C*a*B devient égal à 180° et l'angle C*ad* égal à zéro.

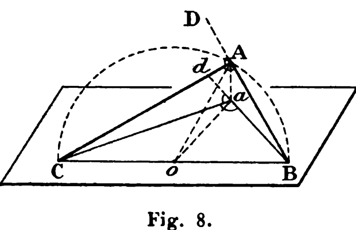


Fig. 8.

On peut également s'en rendre compte en laissant fixe le plan de l'angle droit et faisant varier le point A sur le cercle décrit sur BC comme diamètre ; l'angle

C*a*B varie de 180° à 180° en passant par un minimum et l'angle C*ad* de 0° à 0° en passant par un maximum, égal au minimum précédent.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante our qu'un angle droit se projette suivant un angle droit, c'est qu'un de ses côtés soit parallèle au plan de projection.*

1° *La condition est suffisante.* — Soit un angle droit ACB, dans lequel CB est parallèle au plan de projection et, par suite, à sa projection *cb* (fig. 9).

Le côté CB est perpendiculaire à AC par hypothèse ; il est perpendiculaire à la projetante C*c* puisqu'il est parallèle à un plan auquel C*c* est perpendiculaire ; CB est donc perpendiculaire au plan AC*c*, plan projetant AC ; il en est de même de sa parallèle *cb* ; *cb*, étant perpendiculaire au plan AC*ac*, est perpendiculaire à *ca*, donc l'angle *c* est droit.

2° *La condition est nécessaire.* — Par hypothèse, les angles en C et en *c* sont droits. Supposons que AC ne soit pas parallèle au plan de projection, supposé horizontal, nous allons démontrer que CB l'est. Menons CD parallèle à *ca* (fig. 9).

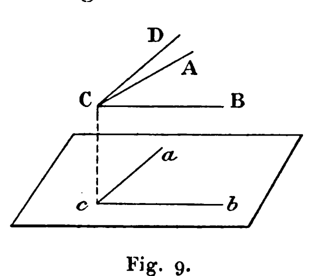


Fig. 9.

La droite *ac* est perpendiculaire à *cb* par hypothèse ; elle est perpendiculaire à *c*C, puisque C*c* est perpendiculaire au plan horizontal dans lequel se trouve *ac* ; donc *ac* et, par suite, sa parallèle CD sont perpendiculaires au plan C*cb*, qui n'est autre que le plan projetant CB ; CB est donc perpendicu-

laire à CD, qui passe par son pied dans le plan ; CB est perpendiculaire à CA par hypothèse ; par suite, CB est perpendiculaire au plan ACD*ca* qui contient ces deux droites et qui est vertical. BC, étant perpendiculaire à un plan vertical, est une horizontale.

Graduation de l'échelle de pente. — Si l'on gradue la ligne de plus grande pente du plan, comme une droite ordinaire, en marquant les points à cote ronde, tels que 2, 3, 4, 5, les horizontales du plan passant par ces points seront projetées suivant les perpendiculaires h_2, h_3, h_4, h_5 à la ligne de plus grande pente (fig. 10).

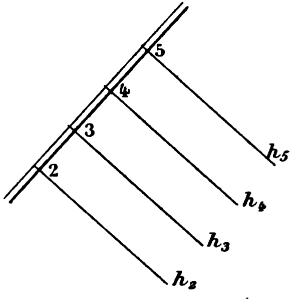


Fig. 10.

Pente d'un plan. — C'est la pente de la ligne de plus grande pente du plan. L'angle du plan avec le plan horizontal est, par définition, l'angle de sa ligne de plus grande pente avec le plan horizontal.

Positions particulières du plan. — Si le plan est parallèle au plan de comparaison, c'est-à-dire *horizontal*, tous ses points ont la même cote ; on n'a pas à le représenter.

Si le plan est perpendiculaire au plan de projection, c'est-à-dire *vertical*, il est complètement déterminé par sa trace horizontale, qui représente la projection de toutes les figures tracées dans le plan.

Emploi d'un plan vertical de projection auxiliaire. — Pour effectuer des constructions dans un

plan vertical défini par sa trace V, on l'amène à coïncider avec le plan de comparaison ou avec un plan parallèle en le faisant tourner de 90° autour de la droite V. Le point A de ce plan, donné par sa projection a (4,5) vient prendre la position a', la distance aa' étant égale à 4 m. 5 à l'échelle du dessin ou à une autre échelle si c'est nécessaire (fig. 11).

Il peut être utile de projeter sur ce plan V des points qui n'appartiennent pas à ce plan. Un point m (3) sera représenté par sa projection m', telle que, mm' étant perpendiculaire à V, $\mu m' = 3$, à l'échelle des cotes. C'est la généralisation de ce procédé, consistant à indiquer graphiquement la cote de M, qui constitue la géométrie à deux plans de projection, lorsque V est fixé en direction. L'avantage de la géométrie à un seul plan de projection est de pouvoir choisir le plan vertical auxiliaire où l'on veut; dans la plupart des questions, l'emploi de plans verticaux auxiliaires est indispensable; nous en verrons de nombreux exemples.

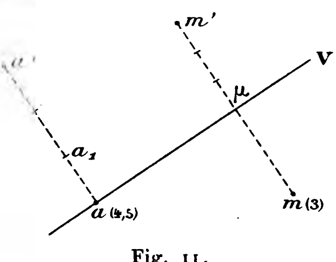


Fig. 11.

Remarque. — Il n'est pas nécessaire de porter $aa' = 4{,}5$ et $\mu m' = 3$; on peut aussi amener V à coïncider avec un plan horizontal quelconque, par exemple celui de cote 3 ; le point M est alors projeté en μ et A en a_1 à la distance $aa_1 = 4{,}5 - 3 = 1{,}5$ (fig. 11).

Distance de deux points. — Soit ab la projection

du segment AB, dont il faut déterminer la grandeur dans l'espace.

En menant par A (fig. 12) une parallèle AC à ab, on voit que la longueur cherchée AB est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté est AC $= ab$, longueur donnée, et l'autre BC est égal à la différence des cotes des points A et B.

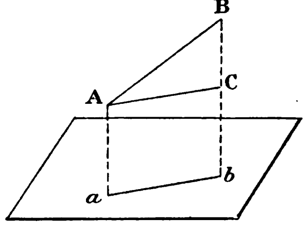


Fig. 12.

On peut construire ce triangle sur ab (fig. 13) en élevant au point b une perpendiculaire bb_1, dont la longueur représente la cote de B par rapport au plan horizontal passant par A ; ab_1 est la distance cherchée.

On obtiendrait cette même figure abb_1 en faisant tourner le triangle de l'espace ABC autour de AC pour l'amener dans le plan horizontal du point A. Cette opération s'appelle *rabattement*. L'angle b_1ab est l'angle de la droite AB avec sa projection c'est-à-dire avec le plan horizontal.

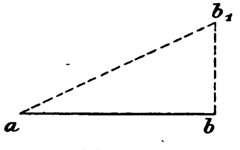


Fig. 13.

Remarque. — Nous avons insisté sur cette question très simple afin de montrer aux élèves comment ils doivent s'habituer à suivre, dans l'espace, les constructions qu'ils ont à effectuer, au lieu de les exécuter machinalement. C'est, à notre avis, le seul moyen de s'assimiler les méthodes de la géométrie descriptive et d'arriver facilement à résoudre un problème.

Calcul. — Au lieu de construire le triangle rec-

tangle dont nous avons parlé, on peut prendre le nombre l qui mesure ab, le nombre h qui représente la différence des cotes de A et de B, et calculer l'hypoténuse du triangle rectangle par la formule :

$$\overline{AB}^2 = l^2 + h^2.$$

Problème inverse. — *Prendre sur une droite donnée* AB, *à partir d'un point* A, *une longueur donnée.* On est ramené à construire un triangle rectangle dont on connaît l'hypothénuse et un angle.

Construisons, comme précédemment, le triangle abb_1 au moyen de la différence bb_1, des cotes du point A et d'un point B pris sur la droite (fig. 14).

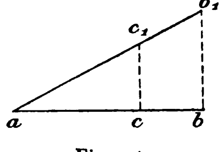


Fig. 14.

Il suffit de porter en ac_1 la longueur donnée pour avoir en c la projection du point C, tel que AC soit égal à la longueur donnée.

Graduation d'une droite. — Une droite étant donnée par les projections et les cotes de deux de ses points, il s'agit de déterminer deux points à cote ronde ; la distance de leurs projections sera l'intervalle. On peut le faire graphiquement, comme précédemment ou par le calcul.

Soit a de cote 2,50 ; b de cote 7,30 (fig. 15).

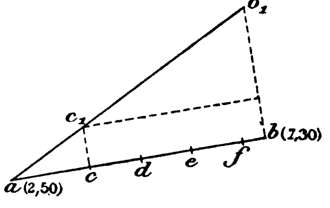


Fig. 15.

Cherchons à déterminer le point de cote 4, par exemple.

Rabattons en ab_1b, autour de ab, sur le plan horizontal du point a, le

triangle rectangle dont nous nous sommes servis précédemment :

$$bb_1 = 7,30 - 2,50 = 4,80.$$

Soit c_1 le rabattement du point cherché, de cote 4 ; on devra avoir $cc_1 = 4 - 2,50 = 1,50$.

En mesurant la longueur ab, on trouve $ab = 8,50$.

La similitude des triangles donne :

$$\frac{ac}{ab} = \frac{cc_1}{bb_1}.$$

On aura donc :

$$ac = \frac{ab \times cc_1}{bb_1} = \frac{8,50 \times 1,50}{4,80} = 2,65.$$

ce qui détermine le point c de cote 4.

On peut déterminer de même le point de cote 5, ou bien calculer directement l'intervalle par la formule :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{i} = \frac{bb_1}{ab} \text{ d'où } i = \frac{ab}{bb_1} = \frac{8,50}{4,80} = 1,77.$$

En portant $cd = de = ef =$ l'intervalle ainsi calculé, on obtient autant de points à cote ronde que l'on veut.

Prendre sur une droite une longueur donnée. — Soit $am_1 = l$ la longueur donnée, am est la longueur à calculer (fig. 16).

cd étant l'intervalle, on a :

$$\overline{c_1d_1}^2 = \overline{cd}^2 + \overline{d_1\delta}^2 = i^2 + 1.$$

On peut donc calculer c_1d_1.

Or on a :

$$\frac{am_1}{c_1d_1} = \frac{am}{c_1\delta_1}, \qquad am = \frac{i \times l}{c_1d_1},$$

ce qui permet de calculer *am* : la cote du point *m* est donnée par :

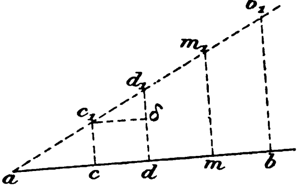


Fig. 16.

$$\frac{mm_1}{d_1\delta} = \frac{am_1}{c_1d_1}$$

$$mm_1 = \frac{l}{c_1d_1}$$

puisque $d_1\delta = 1$.

On résoudrait de la même façon les questions suivantes :

Trouver la cote d'un point pris sur une droite en projection.

Prendre sur une droite un point de cote donnée quelconque.

Mener une droite parallèle à une droite donnée. — On démontre, en géométrie élémentaire, que deux droites parallèles ont leurs projections sur un même plan parallèles, et que la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient parallèles, c'est que leurs projections cylindriques sur deux plans qui se coupent soient parallèles. Quand il n'y a qu'un plan de projection, on remplace cette condition par la suivante :

Comme nous l'avons remarqué, l'intervalle de deux droites parallèles est le même et de même sens ; pour mener par un point une parallèle à une droite donnée, il suffit donc de mener par la projection du point une parallèle à la projection de la droite donnée, et de graduer avec le même intervalle. Si la droite donnée n'est pas graduée, on peut se dispenser de le faire. Soit la droite *a* (3,7) *b* (5,8), à laquelle on demande de mener une parallèle par *m* (4,3) (fig. 17) ; menons par *m* une parallèle à *ab*.

Joignons *am* et menons par *b* une parallèle *bp* à *am* ; la différence des cotes entre *m* et *p* devra être la même que la différence entre *a* et *b*, c'est-à-dire

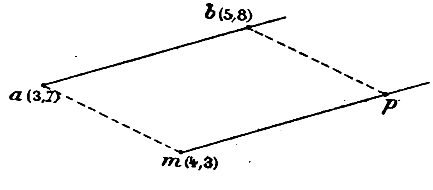


Fig. 17.

2,1, puisque la pente des droites est la même et que $ab = mp$; le point *p* aura la cote $4,3 + 2,1 = 6,4$ ce qui détermine la droite cherchée.

Inversement, on reconnaît que deux droites sont parallèles si la propriété précédente est vérifiée.

PROBLÈMES

RELATIFS AUX PLANS

Étant donné un plan par trois points ou deux droites qui se coupent, déterminer ses horizontales. — Soient *oa*, *ob* les projections de deux droites qui se coupent, ou, ce qui revient au même ***a***, ***o***, ***b***, les projections de trois points dont on connaît les cotes et qui déterminent un plan (fig. 18).

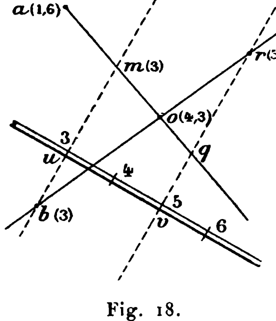


Fig. 18.

Prenons sur *oa* le point *m* qui a même cote que le point *b*; la droite *mb*, qui est tout entière dans le plan, puisqu'elle y a deux de ses points, est une horizontale : il en sera de même pour toute droite parallèle, telle que *rq* : comme vérification, les points *r* sur *ob* et *q* sur *oa* doivent avoir la même cote ; une perpendiculaire quelconque à la projection des horizontales sera une ligne de plus grande pente du plan, si les points *u* et *v* ont pour cotes celles des horizontales *mb* et *br*, que la ligne de plus grande pente du plan rencontre en ces points.

Après avoir déterminé ainsi deux horizontales du plan, il suffit de tracer une échelle de pente perpendiculaire à la projection de ces horizontales, et de graduer cette échelle de pente comme nous l'avons indiqué pour une droite quelconque, connaissant les cotes de deux points *u* et *v*.

Reconnaître si deux droites données par leurs projections se rencontrent. — La condition nécessaire et suffisante pour que deux droites D, Δ, se coupent, c'est que le point de rencontre *o* de leurs projections *d*, δ ait la même cote si on le considère comme appartenant à l'une ou l'autre des droites.

La condition est nécessaire : si les droites se rencontrent en un point *o*, ce point a une cote déterminée et il se projette à la fois sur *d* et sur δ, c'est-à-dire à leur rencontre.

La condition est suffisante : soit *o* le point de rencontre de *d* et δ ; par hypothèse, il a la même cote sur D et Δ ; donc ces deux droites se rencontrent en ce point bien déterminé.

Étant donnée la projection horizontale d'un point d'un plan, déterminer ce point. — Soit un plan donné par deux droites *ab* et *cd* qui se coupent en un point *o* (fig. 19). Il faut déterminer la cote d'un point *m* qu'on suppose dans le plan. Joignons *am* qui rencontre *cd* en un point *p* ; puisque *am* est une droite du plan, on sait trouver la cote du point *p* appartenant à *cd* ; la droite *ap* est donc

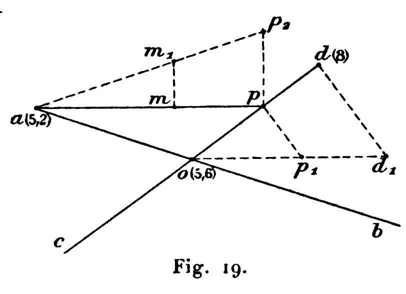


Fig. 19.

déterminée et on pourra connaître la cote de m.

Pour trouver la cote du point p, rabattons le plan projetant cd autour de cd sur le plan horizontal du point o ; d viendra en d_1 sur la perpendiculaire à cd à une distance dd_1 égale à la différence 2,4 des cotes des points o et D. La longueur de la perpendiculaire pp_1 représente ce qu'il faut ajouter à la cote de o pour avoir celle de P.

Cherchons la cote du point M pris sur la droite AP, en construisant comme précédemment le triangle rectangle, rabattu sur le plan horizontal du point A. Le point p vient en p_2 à une distance pp_2 égale à la différence des cotes de P et de A. La perpendiculaire mm_1 donne ce qu'il faut ajouter à la cote de A pour avoir celle du point M.

Si le plan est donné par son échelle de pente, il suffit de mener l'horizontale du point m ; la cote de ce point sera celle du point p où cette horizontale rencontre l'échelle de pente (fig. 20).

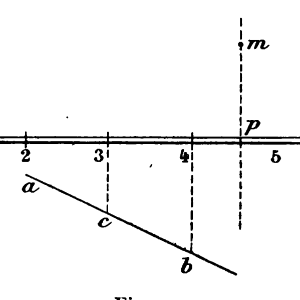


Fig. 20.

On peut de même déterminer une droite connaissant sa projection ab et sachant qu'elle appartient au plan. Il suffit (fig. 20) de mener les horizontales de cote 3 et 4 qui rencontrent ab en c et b ; l'intervalle de la droite est cb. Le point C a la cote 3 et B la cote 4.

Plans parallèles. — Deux plans parallèles ont leurs échelles de pente parallèles et graduées avec le même intervalle, dans le même sens.

Détermination de l'échelle de pente d'un plan donné par trois conditions. — Si l'on donne le plan par deux droites qui se coupent, par trois points, une droite et un point, ou deux droites parallèles, on procède comme nous l'avons fait précédemment (fig. 18).

Pour mener un plan passant par une droite et parallèle à une direction donnée, la solution est la même puisque cela revient à se donner le point à l'infini dans la direction considérée ; on mène par un point de la droite une parallèle à cette direction ; le plan est déterminé par les deux droites.

Plan passant par un point et parallèle à un plan donné. — On mène par le point une parallèle à l'échelle de pente du plan donné, et l'on gradue cette droite avec l'intervalle du plan, dans le même sens.

Plan donné par une horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan de comparaison, dans un sens déterminé.

Soit h (4) l'horizontale donnée (fig. 21).

Prenons comme plan de projection auxiliaire le plan vertical dont la trace V est perpendiculaire à h, et rabattons-le sur le plan horizontal de cote 4. La ligne de plus grande pente du plan cherché, projetée suivant V, sera rabattue en uk', faisant, dans le sens indiqué, l'angle α donné.

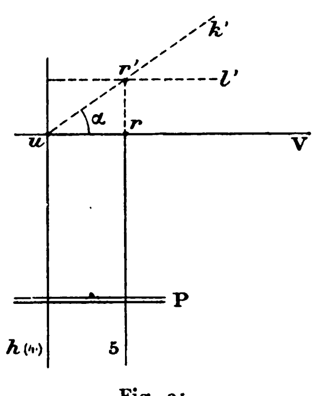


Fig. 21.

En menant la parallèle l' à V à la distance 1, on ob-

tient le point r' de cote 5, qui détermine l'horizontale de cette cote.

On peut alors tracer, où l'on veut, une échelle de pente P du plan cherché.

Remarque. — Tout ce qui est dans le plan P se projette sur le plan V suivant uK'; cette propriété est très commode pour les applications.

Plan de pente donnée passant par une droite donnée. — La formule $i = \frac{1}{p}$ donne l'intervalle du plan.

Cherchons l'horizontale de cote 2 du plan (fig. 22); sa distance au point a, de cote 3, sera égale à i; en effet, la perpendiculaire abaissée de a sur l'horizontale est la projection d'une ligne de plus grande pente du plan, c'est-à-dire une échelle de pente; ap doit donc être l'intervalle. Il suffit, pour construire h, de décrire de a un cercle avec i comme centre, et de mener de t les tangentes à ce cercle; il y a deux solutions h et h_1 auxquelles correspondent deux plans P et P_1.

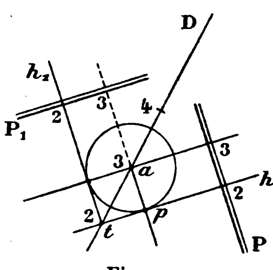


Fig. 22.

Condition de possibilité. — Il faut $ap < at$, c'est-à-dire que l'intervalle de D soit supérieur à i, ou encore que la pente de D soit inférieure à la pente donnée p.

Si p est égale à la pente de D, les deux solutions sont confondues, et D est la ligne de plus grande pente du plan cherché; d'ailleurs, la dénomination même de ligne de plus grande pente indique bien

qu'une droite D d'un plan ne peut avoir une pente supérieure à celle de ce plan.

Remarque. — Si p est un nombre incommensurable il n'est pas commode de calculer i; soit par exemple $p=\sqrt{5}$; en désignant l'unité par u, dont l'échelle donne la longueur

$$i = \frac{u}{\sqrt{5}}$$

$$5i^2 = u^2$$

$$\frac{i^2}{u^2} = \frac{1}{5}.$$

On est ramené à construire un carré qui soit à un carré donné comme une ligne est à une autre ligne, construction que l'on sait effectuer.

Si $p = \sqrt{3}$ on peut se rappeler que tg 60° $= \sqrt{3}$.

Dans le triangle Aap, rectangle en a (fig. 23) on connaît Aa = 1 et l'angle apA = 60°, ce qui permet de construire le triangle et de connaître l'intervalle ap; la construction s'effectue alors comme précédemment.

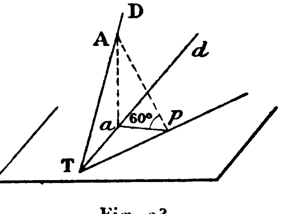


Fig. 23.

La solution est la même si l'on donne, au lieu de p, l'angle que doit faire le plan avec le plan horizontal.

Nous expliquerons autrement cette solution quand nous aurons étudié les plans tangents aux surfaces coniques.

Mener par un point, dans un plan donné, une droite de pente donnée. — D'après ce que nous avons dit précédemment, la pente de la droite doit être inférieure à celle du plan.

On aura l'intervalle de la droite par la formule

$$i = \frac{1}{p}.$$

Soit a (3) le point donné (fig. 24) ; le point de cote 4 de la droite devra se trouver sur l'horizontale 4 du plan, à une distance de a égale à i; il suffit donc de décrire un cercle de a comme centre avec i pour rayon ; on obtient ainsi deux points b et c et deux droites ab, ac, répondant à la question, symétriques par rapport à la ligne de plus grande pente, comme il était facile de le prévoir.

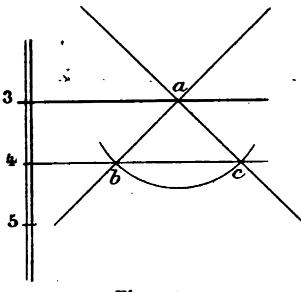


Fig. 24.

INTERSECTION DE DEUX PLANS

La méthode générale consiste à couper les deux plans P et Q par des plans auxiliaires convenablement choisis.

Prenons un plan R; il coupe P suivant une droite U et Q suivant une droite V; les deux droites U et V, étant dans un même plan R, se rencontrent en un point qui est à la fois dans les plans P et Q; ce point appartient donc à l'intersection cherchée.

En recommençant l'opération, à l'aide d'un autre plan S, on obtiendra un second point de l'intersection qui se trouve ainsi déterminée, puisque l'on sait que c'est une droite.

Supposons les deux plans donnés par leurs échelles de pente graduées (fig. 25). Les horizontales des points 4, qui sont perpendiculaires aux échelles de

pente, se rencontrent en un point i de cote 4 qui appartient à l'intersection; de même celles des points 2 se rencontrent en un point K de cote 2.

L'intersection cherchée est la droite iK, dont on a l'intervalle.

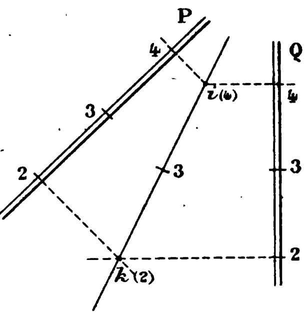


Fig. 25.

Intersection de deux plans dont les échelles de pente sont parallèles. — Soient les plans P et Q (fig. 26).

On a un point de l'intersection qui est le point à l'infini commun aux horizontales des deux plans.

On a donc la direction de l'intersection qui est horizontale. Pour en avoir un point, coupons par un troisième plan arbitraire R.

Il coupe P suivant une droite d et Q suivant δ; ces deux droites se rencontrent en i; l'intersection est la droite ik, parallèle aux horizontales, dont il est facile d'avoir la cote.

Fig. 26.

Cette solution est à employer lorsque les plans ont des pentes de même sens; elle convient également si les échelles de pente des deux plans sont presque parallèles.

Autre solution. — Soient les 2 plans P et Q (fig. 27).

La droite cherchée étant horizontale doit donner

des points de même cote sur P et Q; les intervalles *ab* et *cd* doivent être divisés en K et *l* dans le même rapport

$$\frac{Kb}{Ka} = \frac{lc}{ld}$$

il suffit donc de joindre deux couples de points de même cote; *bc*, *da* ainsi obtenues se coupent en un point *i* qui appartient à l'intersection; cette intersection est l'horizontale K*l*; on vérifie facilement l'égalité des rapports en considérant les triangles homothétiques *iab* et *icd*.

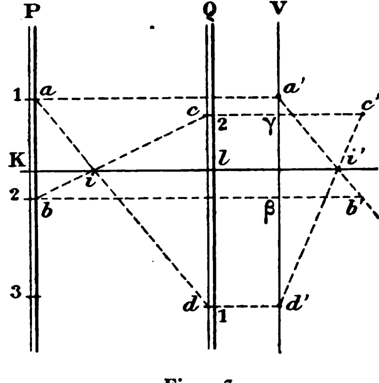


Fig. 27.

Projection auxiliaire. — On peut également projeter sur le plan vertical V, rabattu, par exemple, sur le plan horizontal de cote 1; *a* se projette en *a'*, *b* en *b'* à une distance $\beta b' = 1$ (fig. 27).

Tout ce qui est dans P se projette sur V suivant *a'b'*; de même, tout ce qui est dans Q suivant *c'd'*; l'intersection cherchée est une perpendiculaire au plan V projetée suivant le point *i'*; en menant par *i'* la parallèle aux horizontales, on a l'intersection des deux plans.

Cas particuliers. — 1. Supposons le cas où chacun des deux plans est donné par sa trace horizontale et un point (fig. 28).

Le plan P, par sa trace t et un point a (4,2),

Le plan Q, par sa trace θ et un point b (3,8) t et θ étant les horizontales de cote 3.

Lé point de rencontre i des deux traces est un point de l'intersection, de cote 3. Joignons ab. La

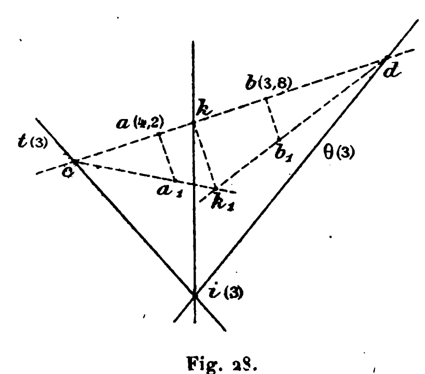


Fig. 28.

droite du plan P, projetée suivant ab, est déterminée par le point a et le point c de cote 3.

De même, la droite du plan Q projetée suivant ab est déterminée par les points b et d (3).

Faisons tourner autour de cd le plan vertical qui contient ces droites, pour l'amener à coïncider avec le plan horizontal de cote 3.

Les points c et d restent fixes; le point a vient en a_1 à une distance aa_1 égale à 1,2; le point b en b_1 à une distance $bb_1 = 0,8$.

Le point où les deux droites se rencontrent est rabattu en K_1 et se projette en k sur cd. La cote du point K est représentée par la longueur KK_1, à laquelle on ajoute 3.

L'intersection est la droite ik.

2. Supposons les plans donnés par leurs traces t et θ et faisant le même angle avec le plan horizontal.

Dans ce cas, l'intersection sera projetée suivant la bissectrice des traces (fig. 29).

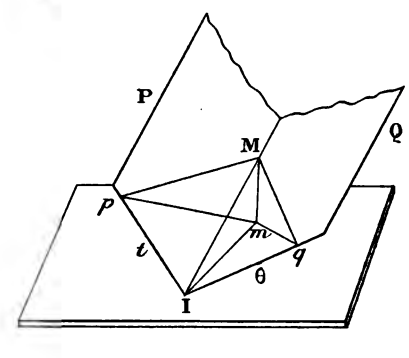


Fig. 29.

Soit, en effet, un point M de l'intersection; abaissons de ce point les perpendiculaires sur les traces t et θ.

Les deux triangles rectangles Mmp et Mmq (fig. 30) sont égaux, comme ayant un côté Mm commun et un angle égal; l'angle en p, angle du plan P avec le plan horizontal, est égal à l'angle en q par hypothèse.

Donc $mp = mq$ et le lieu du point m est la bissectrice des droites t et θ.

Pour déterminer la cote du point m, on se sert du triangle Mmp, dans lequel on connaît mp par construction, et l'angle en p qui est donné.

Si cet angle est de 45°, la cote de m sera précisément mp.

3. Intersection d'un plan donné d'une manière quelconque avec un plan vertical. Tout ce qui est dans le plan vertical se projette sur sa trace; on a donc immédiatement la projection de l'intersection; pour la graduer, il suffit de marquer les cotes des points d'intersection avec deux droites quelconques du plan, de préférence des horizontales.

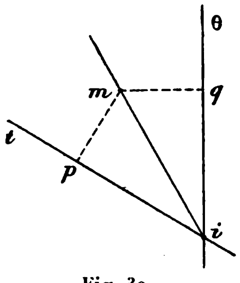


Fig. 30.

Point commun à trois plans. — Soient P, Q, R les trois plans supposés non parallèles et ne passant pas par une même droite, c'est-à-dire formant un trièdre (fig. 31).

Coupons par un plan auxiliaire; il donne dans P, Q, R des droites A, B, C, qui forment un triangle.

Un plan parallèle donne un triangle homothétique $\alpha\beta\gamma$.

Le centre d'homothétie des triangles est le point commun aux trois plans.

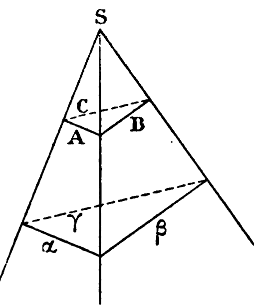


Fig. 31.

Si les deux triangles homothétiques sont égaux, le point S s'éloigne à l'infini dans une direction déterminée; c'est le cas où les trois plans sont parallèles à une même droite.

APPLICATION. — *Déterminer le sommet d'un tétraèdre ayant pour base* ABC *dans le plan de comparaison, connaissant les dièdres suivant* AB, BC, CA.

On est ramené à trouver le point commun à trois plans définis par leurs traces horizontales, et leur angle avec le plan horizontal. Nous prendrons la solution telle que tous les plans aillent en montant vers l'intérieur de ABC.

On pourrait déterminer les échelles de pente; il est préférable, en vue de ce qui suivra, d'employer des plans verticaux auxiliaires perpendiculaires aux horizontales données.

Soit ABC le triangle donné dans le plan de comparaison. Le plan V rabattu met en évidence l'angle α du dièdre AB; de même V_1 l'angle β du dièdre BC

et V_2 le rectiligne γ du dièdre suivant CA (fig. 32).

Coupons par le plan horizontal de côté 1. Pour avoir les horizontales de chacun des plans, il suffit de mener, sur les projections auxiliaires, des parallèles h', h'_1, h'_2 à V, V_1, V_2, à la distance 1. On obtient

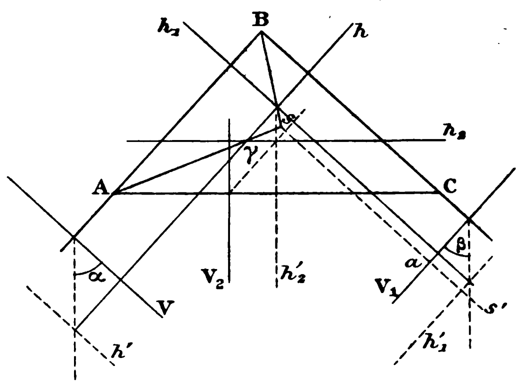


Fig. 32.

ainsi les horizontales h, h_1, h_2, parallèles à AB, BC, CA, qui déterminent un triangle homothétique de ABC. En joignant deux couples de points homologues, on a le point s, projection du sommet du tétraèdre. Sa cote os' est obtenue en le considérant comme appartenant, par exemple, au plan BCS ; comme tel, il se projette en s' sur V_1 ; sa cote est $s'a$.

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Méthode générale. — On coupe par un plan passant par la droite ; ce plan coupe le plan donné suivant une droite qui rencontre la droite donnée au point cherché.

Supposons le plan P donné par son échelle de pente et la droite b graduée (fig. 33).

Menons par *b* un plan quelconque, déterminé par la direction arbitraire de ses horizontales. En prenant les points d'intersection de deux horizontales de même cote, on obtient la droite *uk*, intersection de P avec le plan auxiliaire; *uk* rencontre *b* au point *i* cherché, dont il est facile de trouver la cote.

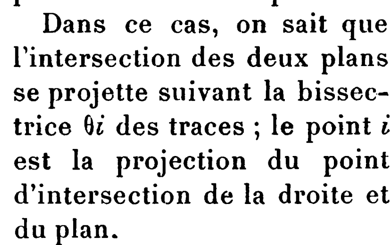


Fig. 33.

REMARQUE. — Un cas particulier intéressant des méthodes précédentes est celui où la droite est donnée par sa pente et le plan par sa trace et une pente égale à celle de la droite.

Soit la droite *ad*, *a* étant la trace sur le plan horizontal, et *t* la trace d'un plan de même pente que la droite (fig. 34).

Coupons par le plan dont la droite est la ligne de plus grande pente ; la trace de ce plan sera la perpendiculaire en *a* à *ad*. Les deux plans ont la même pente.

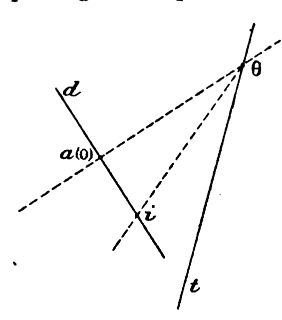


Fig. 34.

Dans ce cas, on sait que l'intersection des deux plans se projette suivant la bissectrice θi des traces ; le point *i* est la projection du point d'intersection de la droite et du plan.

Il est à remarquer que la position du point *i*, en projection, est indépendante de la pente, dont on n'aurait à se servir que pour déterminer la cote du point *i*.

Autre cas particulier. — Supposons la droite parallèle à l'échelle de pente du plan. Menons par la droite le plan dont elle serait une ligne de plus grande pente, et appliquons la construction faite pour l'intersection de deux plans dont les échelles de pente sont parallèles. En joignant deux couples de points de même cote, on obtient l'horizontale h d'intersection des deux plans, qui rencontre D au point i cherché (fig. 35).

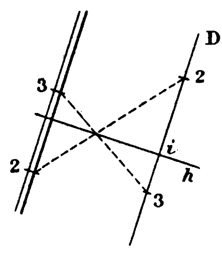


Fig. 35.

Cas ou la droite donnée n'est pas graduée. — Il est avantageux de projeter sur un plan auxiliaire V perpendiculaire aux horizontales du plan. La droite ab se projette en $a'b'$ (fig. 36) telle que $a'\alpha = 2{,}3$, cote de a et $b'\beta = 0{,}5$, cote de b.

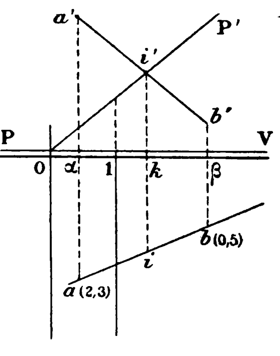


Fig. 36.

Tout ce qui est dans P se projetant sur P' et tous les points de AB sur $a'b'$, le point cherché est projeté en i', horizontalement en i, dont on a la cote en ki'. Cette méthode sera employée pour les sections planes de polyèdres.

PROBLÈMES RELATIFS AUX INTERSECTIONS DE PLANS

Mener par un point donné une droite s'appuyant sur deux droites données (non dans un même plan).

Soit M le point ; A et C les deux droites ; le lieu

géométrique de toutes les droites passant par le point M et s'appuyant sur A est le plan MA; de même, le lieu des droites passant par M et s'appuyant sur C est le plan MC; l'intersection des plans MA et MC sera la droite cherchée, dont on connaît déjà le point M.

Remarque. — On aurait pu dire : le plan MA est un premier lieu de la droite cherchée; cette droite devant, d'autre part, s'appuyer sur C, on en aura un point en prenant l'intersection de C avec le plan MA. En joignant ce point au point M, on obtient la droite demandée.

Cette solution conduit à des constructions moins symétriques, mais souvent plus commodes.

Soit une droite AB, située dans le plan horizontal; CD une autre droite, projetée suivant *cd*, *c* étant la trace de la droite et *d* ayant une cote 3 (fig. 37), *m* la projection d'un point M de cote 1,2.

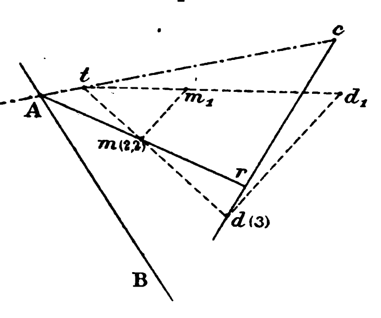


Fig. 37.

Menons le plan MCD et cherchons son intersection avec AB en coupant par le plan de projection dans lequel se trouve AB. Il suffit pour cela de trouver la trace de la droite *md*.

Amenons le plan vertical projetant *md* à coïncider avec le plan de projection en le faisant tourner autour de *md*. Le point *m* est rabattu en m_1 à une distance mm_1 égale à sa cote 1,2, le point *d* en d_1, tel que $dd_1 = 3$; $m_1 d_1$ rencontre la trace *md* du plan vertical

en un point t qui est de cote nulle ; ct est donc la trace horizontale du plan mcd ; ct rencontre AB au point A, et Am est la droite cherchée. Nous avons deux manières de trouver la cote du point r, rencontre de Am avec cd, suivant que l'on considère ce point comme appartenant à Am ou à cd ; comme vérification, la droite Am devant s'appuyer sur cd, les deux cotes ainsi déterminées doivent être égales.

Mener une droite parallèle à une direction donnée, s'appuyant sur deux droites données (non dans un même plan).

Ce problème est un cas particulier du précédent ; il suffit de supposer que le point M s'éloigne à l'infini dans une direction donnée.

On mène donc par l'une des droites un plan parallèle à la direction donnée ; on prend l'intersection de ce plan avec la seconde droite, et, par le point ainsi obtenu, on mène une parallèle à la direction donnée ; comme vérification, cette parallèle doit rencontrer la première droite.

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

PROBLÈMES DE DISTANCE

Détermination de la perpendiculaire à un plan en un point de ce plan. — Soit un plan donné par sa trace horizontale t et un point a (1) (fig. 38).

Une perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan, en particulier aux horizontales ; l'angle droit qu'elle fait avec ces horizontales se projettera suivant un angle droit, puisqu'un des côtés est parallèle au plan de projection.

La perpendiculaire au plan au point A se projettera

donc suivant la perpendiculaire aux horizontales menée par a. Cette condition n'est évidemment pas suffisante pour déterminer la perpendiculaire.

Rabattons le plan projetant cette droite sur le plan horizontal autour de sa trace am : ce plan coupe le plan donné suivant une droite am rabattue en $a_1 m$, en prenant $aa_1 = 1$. La droite cherchée, étant perpendiculaire au plan, est perpendiculaire à la droite ma_1 de ce plan; en menant cette perpendiculaire sur la figure rabattue, on obtient en θ la trace horizontale de la droite cherchée, qui est la droite a (1) — θ (0).

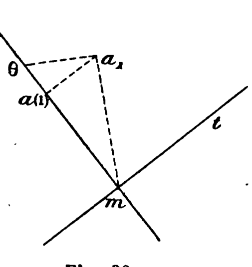


Fig. 38.

Ce procédé est celui que nous emploierons le plus souvent pour la solution des problèmes de distance.

On peut aussi construire l'intervalle de la perpendiculaire, dont on connaît la projection, en s'appuyant sur le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, elle se projette suivant une parallèle à l'échelle de pente du plan ; elle est graduée en sens inverse de l'échelle de pente ; les deux intervalles sont réciproques.*

La première partie résulte de propositions déjà établies ; la perpendiculaire se projette perpendiculairement aux horizontales ; prenons le point A de cote 3 dans le plan ; la perpendiculaire au plan en ce point sera AB projetée suivant ab (fig. 39). Le plan horizontal de cote 2 coupe la ligne de pente en C et la

perpendiculaire en B. Dans le triangle rectangle ABC on a :

$$BD \times DC = AD^2.$$

Or AD = 1, DC est l'intervalle du plan, BD l'intervalle de la perpendiculaire ; donc le produit des nombres qui mesurent les intervalles est égal à l'unité. Du reste, les points *b* et *c* sont de part et d'autre de *a*, donc la droite et l'échelle de pente sont graduées en sens inverse.

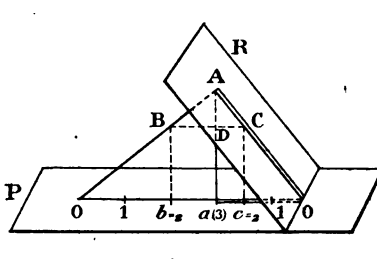


Fig. 39.

REMARQUE. — En se reportant à la figure 38, on voit que *ma* étant l'intervalle du plan, $a\theta$ est celui de la perpendiculaire, puisque θ est de cote nulle ; on a bien $am \times a\theta = \overline{aa_1}^2 = 1$; c'est d'ailleurs ainsi que l'on construit l'intervalle réciproque de *am*. La première manière d'expliquer la construction, identique dans les deux cas, est préférable, parce qu'on se rend compte de la construction dans l'espace.

DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN

Supposons un plan P donné par une horizontale, sa trace *t* par exemple, et un point *a* (1,5). Dans les autres cas, il faut toujours commencer par déterminer une horizontale du plan ; nous supposons ici cette détermination effectuée.

Cherchons la distance du point *m* (1,2) à ce plan (fig. 40). Pour cela, nous allons abaisser, du point M,

une perpendiculaire sur le plan P, chercher son intersection I avec P, et déterminer la longueur du segment MI dont nous aurons la projection *mi*.

La perpendiculaire est projetée suivant *mp* perpendiculaire à *t*. Coupons par le plan projetant *mp* et rabattons autour de *mp*, sur le plan horizontal, la figure formée, dans le plan projetant, par l'intersection avec le plan P d'une part, et la perpendiculaire abaissée du point M d'autre part.

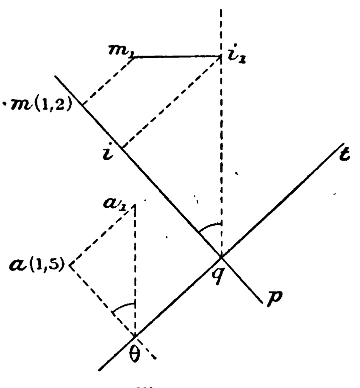


Fig. 40.

L'intersection avec P est une droite parallèle à l'intersection de P avec le plan vertical parallèle mené par *a*, de trace $a\theta$.

Le triangle rectangle $Aa\theta$, rabattu en $aa_1\theta$, aa_1 étant égal à 1,5, donne la direction θa_1, du rabattement de l'intersection cherchée.

Menons par le point *q* une parallèle et abaissons du point m_1, tel que $mm_1 = 1,2$, qui est le rabattement de M, une perpendiculaire m_1i_1 ; i_1 est le pied de la perpendiculaire, projeté en *i* ; m_1i_1 représente la distance de M au plan P ; la perpendiculaire est déterminée par *m* et le point *i*, de cote ii_1.

Remarque. — On peut expliquer la solution d'une autre manière, qui permet de simplifier les constructions. Prenons comme plan vertical de projection auxiliaire le plan projetant la perpendiculaire cherchée, plan dont la trace est *mp*. Effectuons le rabat-

tement sur le plan horizontal de projection (fig. 41).

m se projette sur ce plan en un point rabattu en m', tel que $mm' = 1{,}2$; le point a en a', tel que $a'\lambda = 1{,}5$. Le plan donné est perpendiculaire au plan vertical auxiliaire sur lequel sa trace est qa'; en abaissant de m' la perpendiculaire $m'i'$ sur qa', on a en i', projeté en i, le pied de la perpendiculaire; $m'i'$, étant dans le plan vertical, est en vraie grandeur; donc $m'i'$ est la distance cherchée.

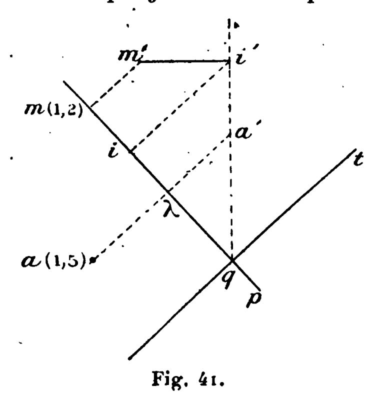


Fig. 41.

Le plan étant donné par son échelle de pente graduée le point M par sa projection m et sa cote, la perpendiculaire sera la parallèle à l'échelle de pente menée par m, la graduation de la droite étant de sens inverse à celle du plan, et les intervalles étant réciproques (fig. 42).

Cet intervalle a été construit en er, en portant $ee' = 1$, joignant e' et menant en e' une perpendiculaire à $e'f$, jusqu'à la rencontre en r avec ef. On gradue ensuite la perpendiculaire mp avec cet intervalle; pour avoir l'intersection de mp avec le plan, il suffit d'appliquer la construction indiquée pour le cas où la droite est parallèle à l'échelle de pente du plan; en joignant les points de cote 1

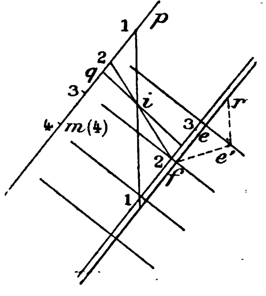


Fig. 42.

et ceux de cote 2, on obtient le point *i* et l'horizontale de ce point rencontre la perpendiculaire au point *q* ; *mq* est la distance du point au plan, dont il reste à trouver la vraie grandeur connaissant les cotes de *m* et de *q*.

Pour les raisons déjà données, nous préférons le premier procédé, d'autant plus qu'il donne immédiatement la vraie grandeur de la distance cherchée, sans nouvelle construction.

Cas particulier. — *Distance d'un point à un plan vertical.* — Soit un plan perpendiculaire au plan horizontal, donné par sa trace *t* (fig. 43). Cherchons la distance du point *m* (4) à ce plan.

La perpendiculaire au plan est projetée suivant *mi*, perpendiculaire aux horizontales ; le point *i* est le pied de cette perpendiculaire, qui est horizontale, puisqu'elle est perpendiculaire à un plan vertical. La distance du point M au plan est donc projetée en vraie grandeur suivant *mi*.

m(4)
i(4)
t

Fig. 43.

PROBLÈME. — ***Mener un plan parallèle à un plan donné à une distance donnée.*** — On élève en un point du plan une perpendiculaire à ce plan, on prend sur cette droite la longueur donnée, et par le point ainsi obtenu on mène un plan parallèle au plan donné.

Soit *ab* la ligne de pente du plan. Prenons le plan projetant l'échelle de pente pour plan vertical et rabattons-le sur le plan de cote o. La trace du plan donné est ba_1, telle que aa_1 soit l'unité à l'échelle du

dessin (fig. 44). Menons la perpendiculaire a_1m_1 et prenons a_1m_1 égale à la longueur donnée. La trace verticale du plan cherché est cm_1, parallèle à a_1b et cd est l'horizontale de cote o. On peut alors tracer, comme il est indiqué sur l'épure, l'échelle de pente du plan cherché, en graduant avec l'intervalle du plan donné et dans le même sens.

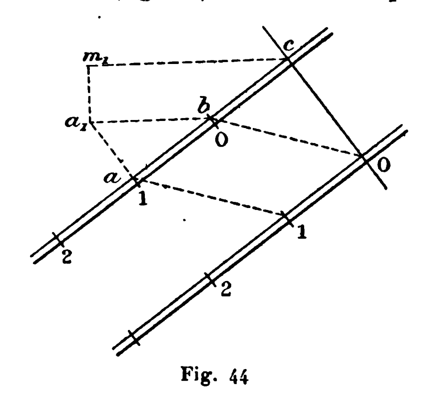


Fig. 44

DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

Mener par un point un plan perpendiculaire à une droite. — Si la droite ab n'est pas graduée, ce qui est le cas général, prenons pour plan de projection auxiliaire le plan vertical ab et rabattons-le sur le plan horizontal de cote 1,5 ; a reste fixe et b se projette en b' ; $bb' = 3{,}7 - 1{,}5 = 2{,}2$; m se projette en m' tel que $\mu m' = 4 - 1{,}5 = 2{,}5$ (fig. 45).

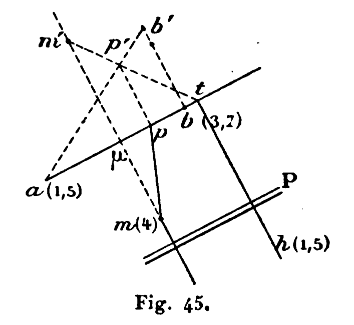


Fig. 45.

Le plan cherché est perpendiculaire au plan vertical auxiliaire ; sa trace sur ce plan est la perpendiculaire menée de m' sur ab' ; son horizontale de même cote que le plan de rabattement, c'est-à-dire de cote

1,5, passe par *t*; c'est la droite *th*, perpendiculaire à *ab* ; on graduerait facilement une échelle de pente P connaissant *h* (1,5) et l'horizontale de *m* (4).

***Distance du point* M *à la droite* AB.** — Tout ce qui est dans le plan perpendiculaire à AB mené par M se projette sur le plan vertical *ab* suivant *m't*; ce plan perpendiculaire rencontre donc AB au point projeté verticalement en *p'*, horizontalement en *p*. *mp* est la projection de la perpendiculaire abaissée de M sur AB. La vraie grandeur de *mp* est la distance de M à AB.

On peut la construire connaissant la cote de *m* et celle de *p*, qui appartient à la droite *ab*.

Cas où la droite donnée est graduée. — On peut appliquer le mécanisme de l'intervalle réciproque.

Soit une droite *ab* graduée et un point *m* (7).

D'après ce que nous avons vu précédemment, l'échelle de pente du plan sera parallèle à *ab*; en prenant celle qui passe par M, par exemple, il suffit de la graduer en sens inverse de la droite, l'intervalle étant réciproque de celui de la droite (fig. 46).

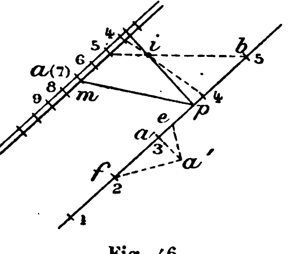


Fig. 46.

On trouve, par le procédé déjà employé pour l'intersection d'une droite et d'un plan, la droite étant parallèle à l'échelle de pente du plan, le pied *p* de la perpendiculaire abaissée de *m* sur la droite. Ayant les cotes de *m* et *p*, on a facilement la grandeur du segment MP, qui mesure la distance de M à la droite.

Mener par une droite un plan perpendiculaire à un plan. — Il suffit de prendre un point sur la droite, et de mener de ce point une perpendiculaire au plan, d'après les méthodes que nous avons indiquées.

Cette perpendiculaire et la droite donnée déterminent un plan. Ce plan passe par la droite ; il est perpendiculaire au plan donné, puisqu'il contient une perpendiculaire à ce plan.

Perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite et distance d'un point à la droite. — Nous avons vu une méthode qui consiste à mener du point un plan perpendiculaire sur la droite ; chercher l'intersection de la droite et du plan ; enfin, déterminer la distance de ce point d'intersection au point donné.

Autre méthode. — Soit une droite D et un point M ; faisons passer par D un plan quelconque (fig. 47) ; abaissons du point M la perpendiculaire MQ au plan P ; si du point Q, dans le plan P, nous menons QI perpendiculaire à D, d'après le *théorème dit des trois perpendiculaires*, MI est perpendiculaire à D et la longueur MI est la distance de E à la droite D. On pourra la construire comme hypothénuse d'un triangle rectangle dont on connaît les côtés MQ et MI.

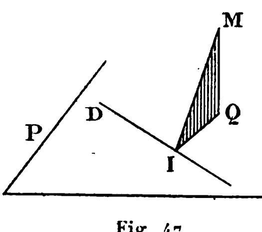


Fig. 47.

Cette méthode conduit aux mêmes constructions que les précédentes ; elle a l'avantage de faire mieux comprendre ces constructions et de donner la solution de nombreux problèmes.

Soit ab la droite, m (5) le point (fig. 48). La perpendiculaire abaissée du point M sur le plan projetant la droite est l'horizontale mp cotée 5 ; elle coupe ce plan au point p de même cote. Rabattons ce plan sur le plan horizontal de cote 2. Le point p est rabattu en p_1 tel que pp_1 égale 3 ; le point α est rabattu en α_1, tel que $\alpha\alpha_1 = 1$. La droite est rabattue en $\beta\alpha_1$, et la perpendiculaire abaissée du point P est rabattue en p_1q_1 perpendiculaire sur $\beta\alpha_1$; la distance du point à la droite est l'hypothénuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés mp et p_1q_1 ; il est construit en mpr.

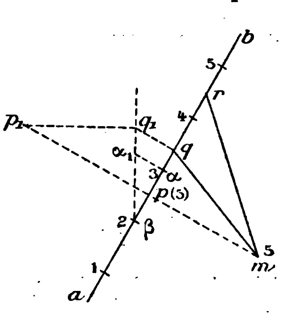


Fig. 48.

La perpendiculaire est projetée suivant mq.

Cas particuliers. — *Distance d'un point à une verticale.* — Soit o le pied de la verticale et m un point quelconque, de cote connue ; la perpendiculaire menée de M sur la verticale, rencontrant cette verticale, est projetée suivant mo ; étant perpendiculaire à une verticale, elle est horizontale ; donc mo est la vraie grandeur de la distance de M à la verticale.

Distance d'un point à une horizontale. — Soit h une horizontale de cote 2 et un point m (3,5). Nous serons ramenés au cas précédent en projetant sur un plan vertical auxiliaire perpendiculaire à h, qui se projettera sur ce plan suivant un point. Rabattons le plan V sur le plan horizontal de cote 2 (fig. 49) ; h se projette suivant le point h'. Le point m se pro-

jette en m' tel que $\mu m' = 1,5$. La distance cherchée est $m'h'$ projetée suivant mp.

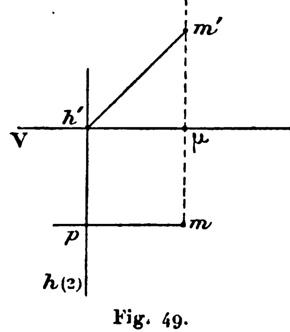


Fig. 49.

On peut interpréter la même construction à l'aide du théorème des trois perpendiculaires, comme précédemment ; il faut retenir que *la distance de M à l'horizontale est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont un côté est la distance de la projection du point à celle de l'horizontale, l'autre côté étant égal à la différence des cotes.*

Perpendiculaire commune a deux droites plus courte distance

Méthode générale. — On mène un plan parallèle aux deux droites ; par chacune des droites on mène un plan perpendiculaire à ce plan ; l'intersection de ces deux plans est la perpendiculaire commune, d'après un théorème de géométrie dont nous ne répéterons pas ici la démonstration ; elle rencontre chaque droite en un point : la plus courte distance des deux droites est la distance des deux points ainsi obtenus.

Soient les deux droites AB et CD dont on a les projections *ab* et *cd* graduées (fig. 50).

Par le point m (4), pris sur AB, menons une parallèle à CD ; il suffit de mener une droite parallèle à *cd* et de la graduer avec l'intervalle de *cd*, dans le même sens ; nous obtenons ainsi un plan dont les horizontales sont parallèles à ad_1. On est ramené à trouver une droite parallèle à la perpendiculaire à ce plan et

s'appuyant sur AB et CD. Menons par le point *m* une perpendiculaire *mp* à ce plan ; son intervalle est réciproque de celui du plan, et il faut graduer *mp* en sens inverse de la graduation du plan. En joi-

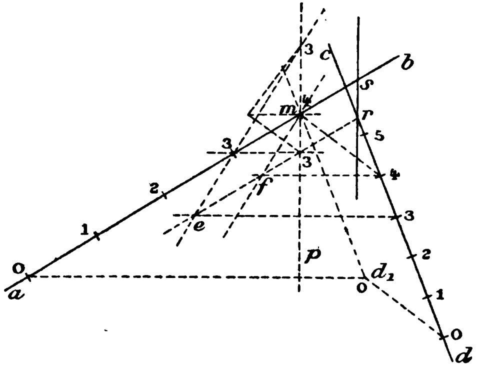


Fig. 50.

gnant les points de même cote sur *ab* et sur *mp* ainsi graduée, on aura des horizontales du plan mené par AB perpendiculairement au plan parallèle à AB et CD.

On a le second plan en opérant de même avec CD; l'intersection des deux plans est la perpendiculaire commune.

On peut opérer plus simplement comme il est fait sur l'épure. On cherche l'intersection du plan mené par *mp* et AB, avec la droite CD. Pour cela, on coupe par un plan passant par CD qui donne la droite *ef* déterminant le point *r* ; *rs* est la perpendiculaire commune, dont on sait trouver la vraie grandeur.

Problème. — ***Mener parallèlement à un plan une droite de longueur minimum, s'appuyant sur deux droites données*** (non dans un même plan). —

Nous allons déterminer d'abord une droite de longueur donnée s'appuyant sur les deux droites et parallèle à un plan ; la condition de possibilité du problème nous donnera le minimum [1].

Soient A et C les deux droites ; P la direction du plan (fig. 51).

Soit Mq la droite cherchée ; projetons la figure de l'espace sur P parallèlement à la droite C. Mq étant parallèle à P se projette en vraie grandeur suivant tm ; le lieu du point m est donc le cercle décrit dans le plan P, de t comme centre, avec un rayon égal à la longueur donnée.

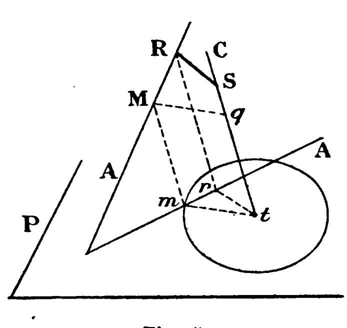


Fig. 51.

D'autre part, m doit se trouver sur A_1, projection oblique de A parallèlement à C ; on aura donc deux solutions aux points d'intersection de A_1 avec le cercle.

Pour que le problème soit géométriquement possible, il faut et il suffit que la longueur donnée soit supérieure à la longueur de la perpendiculaire tr abaissée de t sur A_1 ; cette longueur est le minimum cherché. On obtient la position de la droite en relevant r sur A en R parallèlement à C. En menant alors

---

[1] Nous appliquons ici la méthode générale employée en mathématiques élémentaires pour la recherche des maxima et des minima, aussi bien dans les questions d'algèbre que dans celles de géométrie ; on suppose donnée la grandeur (valeur numérique d'une fonction, longueur, angle, etc.), et on cherche entre quelles limites la valeur attribuée doit être comprise pour que le problème soit possible. Ces limites donnent les maxima et les minima.

par R un plan parallèle à P, qui coupe C en S, on a en RS la droite cherchée.

Remarque. — 1. Si l'on prend une longueur supérieure au minimum, on trouve deux solutions, qui sont situées de part et d'autre de la droite minimum; le point où celle-ci s'appuie sur A, par exemple, est le milieu des points donnés sur A par les deux solutions ; il en est de même sur B.

2. Nous verrons plus tard que ces constructions sont les mêmes que celles qui servent à déterminer l'intersection d'une droite et d'un cylindre. On aurait pu, en effet, expliquer la solution de la manière suivante :

Toutes les droites s'appuyant sur C, parallèles à un plan P, et de la longueur donnée, ont leur autre extrémité sur la surface d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à C, et dont la trace sur P est un cercle ayant pour centre la trace de la droite C sur le plan P.

D'autre part, ces droites devant s'appuyer sur A, le feront aux points d'intersection de A avec le cylindre.

3. Cette plus courte distance parallèlement à un plan devient la perpendiculaire commune, si le plan est parallèle à cette perpendiculaire, par exemple si on connaît la direction de sa projection horizontale, c'est-à-dire celle du plan vertical qui la projette.

Cas particuliers. — Plus courte distance d'une droite quelconque et d'une droite verticale. — Soit une verticale dont le pied est en *o*, et une droite quelconque *d* (fig. 52).

La perpendiculaire commune, étant perpendiculaire

à une verticale, est une horizontale; sa projection horizontale passe par o, puisqu'elle rencontre la verticale, d'autre part, l'angle droit qu'elle fait avec D se projette horizontalement suivant un angle droit, puisqu'un des côtés de l'angle droit est parallèle au plan horizontal; la perpendiculaire commune est donc projetée suivant op perpendiculaire à d. La plus courte distance est op en vraie grandeur.

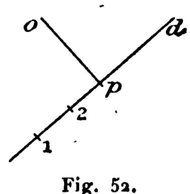


Fig. 52.

Plus courte distance d'une horizontale et d'une droite quelconque. — On ramène ce cas au précédent en prenant comme plan de projection auxiliaire un plan vertical V quelconque perpendiculaire à l'horizontale, qui se projette sur V suivant un point h'. Rabattons V sur le plan horizontal de même cote que h, soit 2.

A et B se projettent en a', b', à des distances de V égales à la différence des cotes avec h (fig. 53). La perpendiculaire commune, qui mesure en vraie grandeur la plus courte distance cherchée, est projetée sur V suivant h p' d'après le raisonnement du cas précédent; d'autre part p' est projeté en p sur ab; pm, perpendiculaire à h en vertu du théorème de la projection de l'angle droit, est la projection de la perpendiculaire commune.

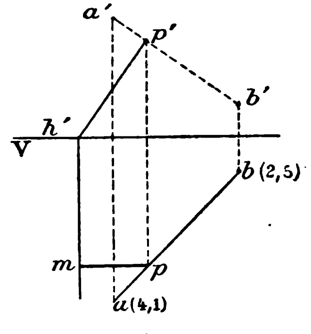


Fig. 53.

Remarque. — Il est intéressant de constater que cela revient à chercher la plus courte distance des deux droites parallèlement à V, et que nous avons été conduits à effectuer les mêmes constructions.

Plus courte distance de deux droites dont les projections sont parallèles. — Soient AB et CD projetées suivant les parallèles *ab, cd.*

Un plan parallèle aux deux droites est vertical, et parallèle à leur plan projetant; la perpendiculaire commune cherchée, étant perpendiculaire à un plan vertical, est une horizontale; l'angle droit qu'elle fait avec AB et CD se projette suivant un angle droit; donc la plus courte distance est mesurée par la distance des deux projections *ab* et *cd* (fig. 54).

Pour avoir la perpendiculaire commune en position, il faut trouver une horizontale, de direction perpendiculaire à *ab*, s'appuyant sur AB et CD. Nous l'avons obtenue en projetant sur le plan vertical auxiliaire *ab* et rabattant sur le plan horizontal du point A. On obtient, comme précédemment, *ab'* et *c'd'* comme projections verticales.

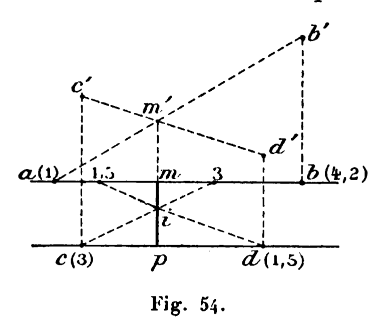


Fig. 54.

La droite cherchée, étant perpendiculaire au plan vertical, se projette suivant un point qui doit se trouver à la fois sur *ab'* et *c'd'*; c'est donc *m'* et la perpendiculaire commune est *mp*, en vraie grandeur d'après ce que nous avons dit plus haut.

Remarque. — Le problème, trouver une horizontale s'appuyant sur deux droites, est le même que celui de la recherche de l'intersection de deux plans dont les échelles de pente sont parallèles; on peut donc obtenir un point i de mp en joignant les points de cote 3 et de cote 1,5, par exemple, sur les deux droites données (fig. 52).

Application. — Dans le cas général, on peut amener les deux droites à avoir leurs projections parallèles sur un plan vertical auxiliaire V, pris perpendiculaire à l'horizontale du plan parallèle aux deux droites.

Soient ab et cd les deux droites (fig. 55); menons par a une parallèle $a\delta$ à cd; l'horizontale d'un plan parallèle aux deux droites est $b\delta$, $a\delta$ étant égal à cd. Prenons V perpendiculaire à $b\delta$.

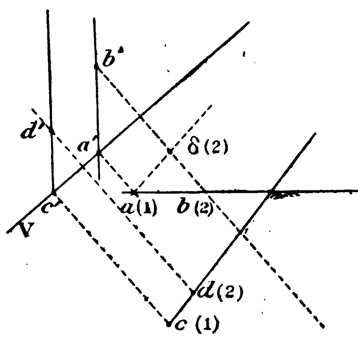


Fig. 55.

Le plan parallèle aux deux droites est perpendiculaire au plan V, c'est-à-dire que les projections $a'b'$ et $c'd'$ des deux droites sur ce plan sont parallèles; la plus courte distance est la distance des deux parallèles $c'd'$ et $a'b'$.

On pourrait déterminer la perpendiculaire commune en opérant sur la projection auxiliaire comme nous l'avons fait sur la projection horizontale dans le cas précédent.

RABATTEMENTS — ROTATIONS

Généralités. — On a pu voir, dans les questions qui précèdent, les simplifications qu'apportait telle position particulière d'une figure à l'application des méthodes générales. Il suffit, pour s'en rendre compte, de comparer, par exemple, les constructions nécessaires pour trouver la plus courte distance de deux droites à celles qu'il suffit d'exécuter dans le cas où l'une des droites est verticale.

Les méthodes que nous allons exposer ont pour but d'amener une figure dans la position la plus favorable pour résoudre un problème avec le moins de constructions possible.

Rabattements. — Si la figure est plane, on amène son plan à coïncider avec un plan horizontal en le faisant tourner autour de l'horizontale contenue dans ce plan, ce qu'on appelle *rabattre le plan* sur un plan horizontal.

Le plan coïncide ainsi avec le plan de la feuille de l'épure; on peut alors exécuter directement et en vraie grandeur les constructions à effectuer dans le plan. Ceci fait, on ramène le plan dans son ancienne position.

Rotations. — Si la figure n'est pas plane, on l'amène dans la position la plus avantageuse en la faisant tourner autour d'un axe convenablement choisi.

On a soin, bien entendu, de ne faire tourner que les points de la figure nécessaires pour la solution de la question proposée.

Les constructions effectuées, on ramène les points utiles dans l'ancienne position de la figure par une rotation en sens inverse.

S'il n'y a que quelques points en dehors d'un plan, nous donnerons encore le nom de *rabattement* à la rotation du plan autour d'une horizontale pour l'amener à coïncider avec le plan horizontal, le plan entraînant dans son mouvement les points en dehors de lui, que nous lui supposerons invariablement liés.

Pratiquement la méthode des rotations n'est avantageuse que si elle s'effectue autour d'un axe vertical ou horizontal.

Rabattre un plan sur un plan horizontal. — Soit un plan P donné par une horizontale h de cote 4 et un point a (6) (fig. 56).

Proposons-nous de faire tourner le plan P autour

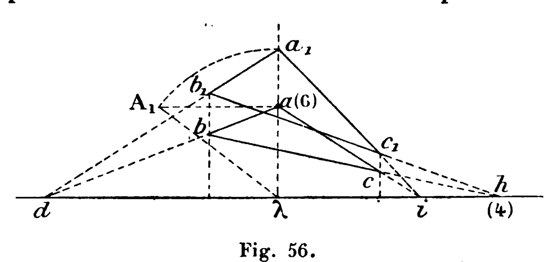


Fig. 56.

de l'horizontale h pour l'amener à coïncider avec le plan horizontal H(4) qui contient h.

Un point A du plan se déplacera dans un plan perpendiculaire à l'axe du rabattement h, c'est-à-dire dans un plan vertical qui rencontre h en λ (fig. 57).

Le point a se déplace sur $a\lambda$; lorsque P coïncide avec H, a vient en a_1, à une distance de λ égale à $A\lambda$, distance du point A à l'axe du rabattement ou au point λ de cet axe.

D'après ce que nous avons dit pour la distance d'un point à une horizontale, $A\lambda$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont un côté est $a\lambda$, l'autre étant la cote de A par rapport au plan sur lequel on effectue le rabattement.

Nous avons construit ce triangle rectangle en $aA_1\lambda$; $aA_1 = 6 - 4 = 2$ et porté la longueur λA_1, en λa_1 (fig. 57); a_1 est le rabattement du point A. On porte cette longueur d'un côté ou de l'autre de l'axe, suivant que l'on effectue le rabattement du côté du plus grand ou du plus petit angle du plan P avec H. Le choix dépend des constructions déjà faites sur l'épure.

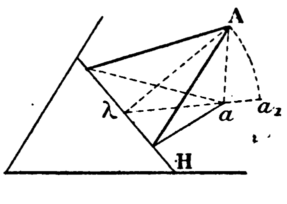


Fig. 57.

Règle. — *En résumé*, un point A projeté en a est rabattu sur une perpendiculaire à l'axe du rabattement, à une distance du point λ, où cette perpendiculaire rencontre l'axe, égale à l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont un côté est la distance de a à l'axe et l'autre la cote de A par rapport au plan sur lequel on effectue le rabattement.

Homologie de la projection d'une figure plane et de son rabattement. — Prenons dans P un triangle abc (fig. 56); en rabattant séparément A, B, C, nous

obtenons les points a_1, b_1, c_1; il y a une certaine correspondance entre les triangles abc et $a_1 b_1 c_1$.

La droite AB projetée suivant ab est rabattue suivant la droite $a_1 b_1$; le point d, où AB rencontre h, ne change pas dans le rabattement; il appartient donc aussi à $a_1 b_1$; de même bc et $b_1 c_1$, ac et $a_1 c_1$, se rencontrent sur l'axe h.

Les droites aa_1 bb_1 cc_1, qui joignent les points homologues passent par un même point à l'infini; on dit dans ce cas que abc et $a_1 b_1 c_1$ sont deux figures homologiques.

Plus généralement, deux figures sont dites homologiques quand les droites qui joignent les points homologues passent par un point fixe, *centre d'homologie*, et quand, de plus, les droites homologues se rencontrent sur une droite fixe, appelée *axe d'homologie*.

Dans le cas qui nous occupe, la projection de la figure et son rabattement sont homologiques; le centre d'homologie est à l'infini dans la direction perpendiculaire à h, qui est l'axe d'homologie.

Nous n'en dirons pas davantage sur cette intéressante question qui nous entraînerait trop loin; ces dénominations permettront pourtant de simplifier le langage.

Trouver la projection* m *d'un point* M *d'un plan connaissant le rabattement* m_1 *de ce point. — Le point m sera sur la perpendiculaire à h menée par m_1. Joignons $a_1 m_1$ qui rencontre l'axe d'homologie en t (fig. 58); la projection de la droite ta_1 est ta, et m est à la rencontre de ta avec $m_1 p$. On a facilement la cote de M.

Dans le cas exceptionnel où aucune des droites

$m_1 a_1$ ne rencontrerait l'axe d'homologie dans les limites de l'épure, on pourrait construire le triangle rectangle $m M_1 p$ connaissant l'angle en p, égal à l'angle en λ dans $a\lambda A_1$, et $M_1 p = m_1 p$.

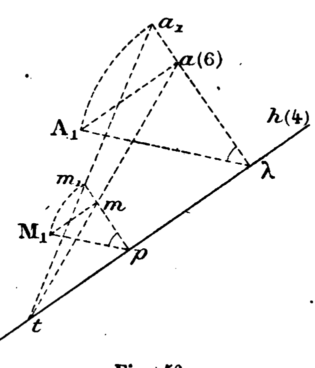


Fig. 58.

Cas où le plan P est vertical. — Dans ce cas, la distance d'un point A à l'axe du rabattement est égale à la cote de A par rapport au plan horizontal sur lequel on effectue le rabattement du plan P.

Nous en avons vu de nombreux exemples, toutes les fois que nous avons pris comme plan de projection auxiliaire un plan vertical.

Rabattre sur un plan horizontal un plan donné par son échelle de pente. — Soit le plan P que nous voulons rabattre sur le plan horizontal de cote 1, par exemple, autour de l'horizontale h de cette cote (fig. 59).

Prenons le point a de cote 2,3. On peut appliquer la méthode générale en construisant graphiquement $a_1\lambda$ comme hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté est $a\lambda$, l'autre étant la cote 1,3 de A, par rapport au plan horizontal de cote 1. On peut aussi calculer λa_1 en prenant, à l'aide de l'échelle du dessin, le nombre qui mesure $a\lambda$, soit 2,5.

$$\overline{\lambda a_1} = \sqrt{1,3^2 + 2,5^2}.$$

Pour rabattre un second point b, on se servira des

propriétés homologiques. On opère de même pour relever un point du plan donné par son rabattement c_1; $a_1 c_1$ rencontre l'axe au point p; donc c_1 se projette sur ap et sur la perpendiculaire $c_1 q$ à l'axe h du rabattement.

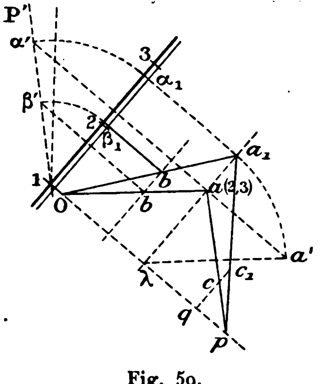


Fig. 59.

On peut aussi se servir du rabattement P' de l'échelle de pente ; a projeté en α' se rabat en α_1 qui donne a_1 ; connaissant b_1, pour avoir b, il suffit de prendre β_1 de décrire de o un arc de cercle avec $o\beta_1$ qui donne β' relevé en b sur la perpendiculaire $b_1 b$ à la charnière h.

Remarque. — Les exemples qui précèdent montrent que les considérations d'homologie permettent de faire mécaniquement le rabattement des points d'un plan et de trouver les projections des points dont on connaît le rabattement, sans avoir besoin de se demander de quel côté il faut porter les cotes.

Il est utile de voir la solution d'un problème dans l'espace, avant de le résoudre au moyen des projections de la figure, afin de choisir la méthode la plus simple. Cette méthode une fois choisie, on doit chercher, autant que possible, à effectuer les constructions mécaniquement, afin de les simplifier et d'éviter les erreurs, tout en allant plus rapidement.

Applications des rabattements. — ***Distance d'un point à une droite.*** — Nous allons amener le plan

déterminé par la droite et le point à coïncider avec un plan horizontal ; il suffira d'abaisser une perpendiculaire du rabattement du point sur le rabattement de la droite pour avoir la distance en vraie grandeur.

Cette méthode est avantageuse lorsque la droite donnée est graduée, parce qu'on a immédiatement l'horizontale qui sert d'axe pour le rabattement.

Soit *m* (3) et la droite *d* graduée (fig. 60).

On a de suite l'horizontale *ma* de cote 3 du plan Q déterminé par la droite et le point. Rabattons le plan Q autour de *ma* sur le plan horizontal de cote 3 ; *a* et *m* restent fixes ; un point *b* quelconque de *d* se rabat en b_1 d'après la règle connue ; *d* est rabattue en ab_1 ; le plan Q coïncidant actuellement avec un plan horizontal, mp_1 est la distance de M à la droite D ; pour avoir la projection *mp* de la perpendiculaire, il suffit de relever p_1 en *p* sur *d* en menant p_1p perpendiculaire à la charnière *am*.

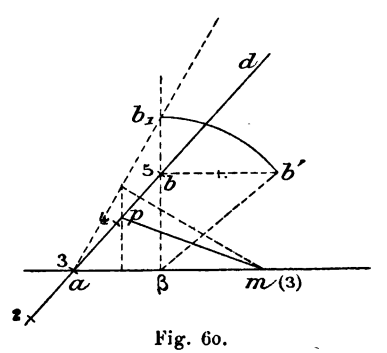


Fig. 60.

Cercle inscrit dans un triangle. — Projections d'un cercle. — Un triangle est donné par ses sommets *a* (3), *b* (4), *c* (9,5) (fig. 61). Déterminons une horizontale *ah* du plan du triangle en prenant sur *bc* le point *d* de cote (3) et rabattons ce plan autour de *ah* sur le plan horizontal de cote (3).

a, qui est sur l'axe, ne change pas, *b* est rabattu en b_1 à une distance construite suivant la règle.

c est rabattu en c_1 par homologie.

Le triangle est rabattu en ab_1c_1; il est facile dans cette position, de mener deux bissectrices qui donnent, par leur rencontre, le point o_1, rabattement du

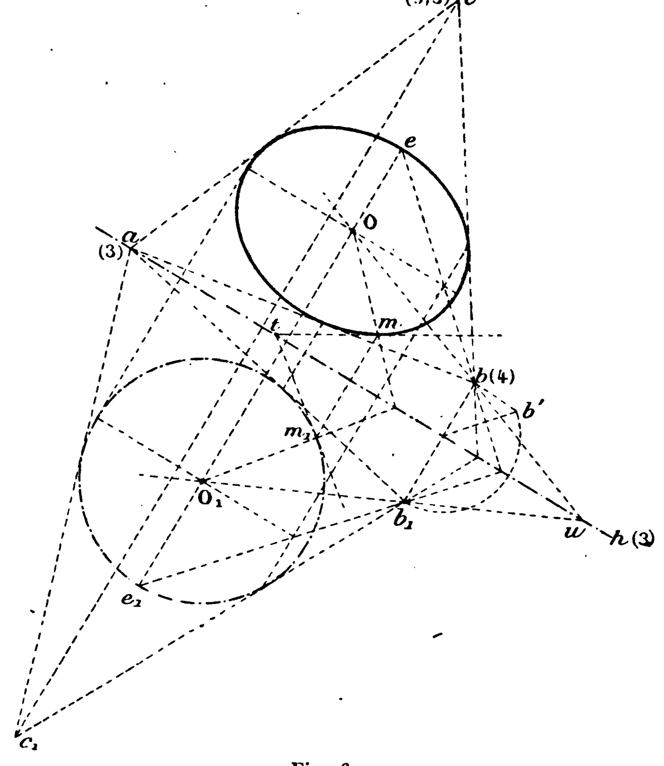


Fig. 61.

centre du cercle dont le rayon est la distance de o_1 à l'un des côtés ab_1. Traçons ce cercle.

Il faut maintenant trouver sa projection lorsque le plan est ramené dans son ancienne position.

Pour avoir la projection du point o_1, servons-nous

des propriétés homologiques ; o_1b_1 rencontre l'axe en u ; o_1 se projette donc en o sur bu, oo_1 étant perpendiculaire à l'axe.

Le diamètre du cercle qui est parallèle à l'axe aura un homologue également parallèle à l'axe; ce diamètre est donc projeté en vraie grandeur; il donne le grand axe de l'ellipse-projection.

Le petit axe provient du diamètre perpendiculaire ; l'homologie nous permet de trouver facilement la projection d'une des extrémités e_1 projetée en e.

L'ellipse est déterminée par ses deux axes en grandeur et en position. On peut la construire par points comme figure homologique du rabattement. La tangente en un point m_1 projeté en m, obtenu par homologie, s'obtient en menant la tangente m_1t au cercle rabattu et en joignant le point t, où m_1t rencontre l'axe, au point m; la tangente est mt. On le démontrerait par le même raisonnement que nous avons fait à propos de la projection de la tangente, en la considérant comme limite d'une sécante.

On a facilement les points de contact avec les côtés du triangle en relevant les contacts du cercle avec les côtés du triangle rabattu.

Trouver le sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes passent par trois points donnés. — Résolvons d'abord le problème quand le plan déterminé par les trois points est horizontal.

Les trois angles au sommet étant droits, chaque arête est perpendiculaire au plan des deux autres. Celle qui passe au point c se projette donc perpendiculairement à la droite ab, qui est une horizontale du plan de la face opposée (fig. 62). Il en est de même pour les arêtes qui passent aux points a et b. Donc

la projection horizontale s du sommet S du trièdre est au point de concours des hauteurs du triangle abc.

Pour avoir la cote de ce point, coupons par le plan vertical projetant SC, et rabattons-le sur le plan horizontal ABC. Le point s sera rabattu sur la perpendiculaire à sc ; d'autre part, SC étant perpendiculaire au plan SAB, les droites λS_1 et $c\ S_1$ doivent être perpendiculaires ; donc S_1 est sur le cercle décrit sur λc comme diamètre ; sS_1 est la cote du sommet projeté en s.

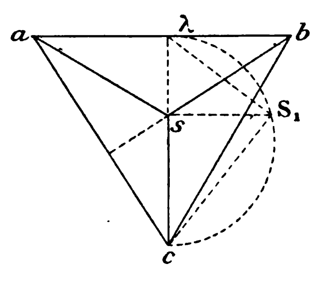


Fig. 62.

Pour que le problème soit possible, il faut que le point s soit à l'intérieur du triangle, c'est-à-dire que celui-ci n'ait que des angles aigus.

Cas où le plan passant par les trois points est quelconque. — Il suffit de rabattre le plan sur un plan horizontal, d'effectuer la construction précédente et de ramener dans son ancienne position le plan entraînant avec lui le sommet du trièdre.

Ce procédé rentre plutôt dans la méthode des rotations que nous allons exposer.

ROTATIONS

Rotations autour d'un axe vertical. — ***Rotation d'un point.*** — En tournant autour d'un axe vertical o, un point quelconque décrit un cercle horizontal qui se projette en vraie grandeur.

Il suffit donc de faire tourner m (fig. 63) de l'angle

voulu mom_1, autour de o ; m_1 aura la même cote que m.

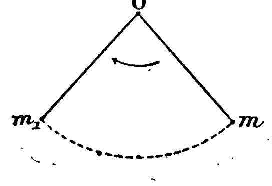


Fig. 63.

Rotation d'une droite. — La plus courte distance de la droite D à l'axe vertical o reste la même pendant la rotation ; d reste tangente à un cercle ayant pour rayon cette plus courte distance, que nous avons montrée être égale à la perpendiculaire op (fig. 64).

Faisons tourner p de l'angle pop_1 égal à l'angle de rotation donné, d viendra prendre la position p_1d_1 tangente au cercle; pour déterminer d_1, prenons a (3) sur d ; la pente de la droite restant la même, a viendra en a_1 tel que $p_1a_1 = pa$ et a_1 sera de cote 3 comme a. p et p_1 ayant la même cote, d_1 est déterminée.

Si d passe par o, c'est-à-dire si D rencontre l'axe vertical, le cercle devient de rayon nul ; le point projeté en o reste fixe ; il suffit de faire tourner un point comme nous l'avons fait (fig. 63).

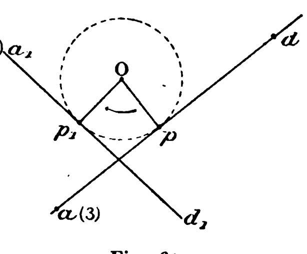


Fig. 64.

REMARQUE. — Dans le cas général, la droite, en tournant autour de la verticale, engendre une surface appelée surface gauche de révolution, ou hyperboloïde à une nappe, parce qu'elle peut aussi être engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe non transverse ; dans le second cas, la droite engendre un cône de révolution ; dans les deux cas,

son angle avec le plan horizontal, et par suite *sa pente, reste fixe.*

Rotation d'un plan. — On pourrait se contenter de faire tourner trois points du plan ; il est plus simple de déterminer, si possible, le point où le plan rencontre l'axe, point qui reste fixe, puis de faire tourner une horizontale.

On peut aussi remarquer que toutes les horizontales du plan enveloppent des cercles de centre o ; par exemple, l'horizontale de cote 2 restera tangente au cercle du rayon op (fig. 65).

pop_1 étant l'angle donné, la nouvelle projection de

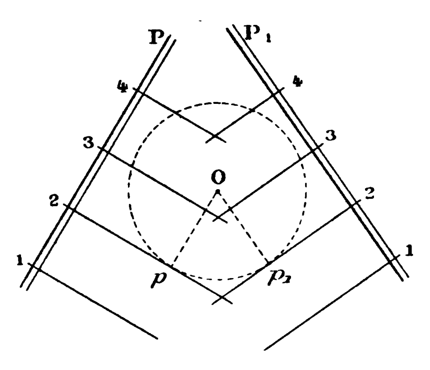


Fig. 65.

l'horizontale est la tangente au cercle en p_1 ; soit p_1h_1.

Prenons une droite P_1 perpendiculaire à p_1h_1 pour nouvelle échelle de pente ; h_1 est l'horizontale de cote 2 ; l'intervalle du plan n'a pas changé, puisque le plan fait toujours le même angle avec le plan horizontal ; on n'a donc qu'à graduer P_1 comme P, à partir de h_1 de cote 2.

Mener par une droite un plan de pente donnée. — Soit *ab* la projection graduée de la droite donnée (fig. 66).

On peut expliquer par les rotations la solution déjà donnée de ce problème.

Prenons une échelle de pente P d'un plan passant par un point de AB, le point 3 par exemple, projeté en *o*. Graduons P de façon à ce que le plan ait la pente donnée ; on sait que l'intervalle est l'inverse de la pente. Supposons, par exemple, la pente 2/3, l'intervalle sera les 3/2 de l'unité du dessin.

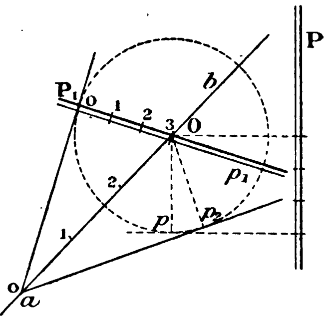


Fig. 66.

Faisons tourner le plan autour de la verticale du point *o* de la droite. Une horizontale du plan, la trace par exemple, enveloppe le cercle de rayon *op* ; *op* étant trois fois l'intervalle trouvé ; pour que cette horizontale rencontre *ab*, il faut qu'elle devienne une tangente menée de la trace *a* de la droite au cercle ; par exemple aP_1.

En prenant une échelle de pente perpendiculaire à aP_1, et la graduant comme P en donnant à P_1 la cote zéro, on aura un plan qui passe bien par la droite, puisqu'il en contient deux points *o* (3) et *a* (*o*) ; ce plan a la pente donnée.

On voit qu'il y a deux solutions correspondant aux deux tangentes qu'on peut mener du point *a*. Pratiquement, il est inutile de tracer l'échelle P.

Problèmes sur les rotations. — Pour leur résolution, il est utile de se rendre compte de la loi du

mouvement d'un plan ; pendant la rotation, le plan passe constamment par un point fixe S et ses horizontales restent tangentes à des cercles horizontaux.

Le plan, dans son mouvement, reste tangent à un cône de révolution de sommet S′, dont le demi-angle au sommet est le complément de l'angle du plan avec le plan horizontal (fig. 65) ; on dit que le plan *enveloppe* ce cône.

L'angle du plan avec le plan horizontal, et par suite la pente de ce plan, reste fixe.

Amener un plan à passer par un point donné. — Soit P le plan donné par son échelle de pente, *a* (3, 5) le point donné *o* le pied de l'axe vertical (fig. 67).

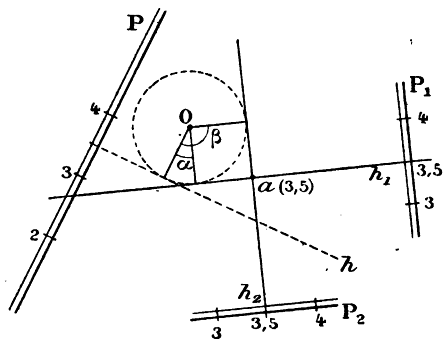


Fig. 67.

Considérons l'horizontale *h* de cote 3,5 de P; en tournant autour de l'axe vertical *o*, elle enveloppe un cercle de centre *o*; d'autre part, quand P passera par A, *h* passera par *a*, qui est de même cote; il suffit donc de mener de *a* une tangente au cercle enveloppe; il y a deux solutions h_1 et h_2, auxquelles correspondent deux nouvelles positions P_1 et P_2 du plan, obtenues en graduant les échelles de pente avec l'intervalle

de P, dans le même sens. L'angle de rotation est α ou β, suivant la solution choisie.

Nous verrons plus loin que cela revient à mener au cône qu'enveloppe le plan P les plans tangents passant par A.

Amener un plan à être parallèle à une direction donnée. — Cela revient à supposer que le point A, du cas précédent, s'éloigne à l'infini dans une direction donnée : soit S le point fixe du plan. Après la rotation, le plan P devra contenir la parallèle à la direction donnée menée par S. D'où la construction suivante :

Soit P donné par son échelle de pente et δ la direction donnée, graduée ; *o* le pied de l'axe vertical (fig. 68).

Soit *s* le point du plan P projeté en *o* ; on obtient sa cote 4 en menant l'horizontale passant par *o* ; menons par *s* une parallèle *st* à δ et considérons le point *t* de cote 2 de cette droite, graduée avec l'intervalle de δ à partir de *s* (4). Il suffit de faire tourner l'horizontale 2 du plan jusqu'à ce qu'elle passe par *t*.

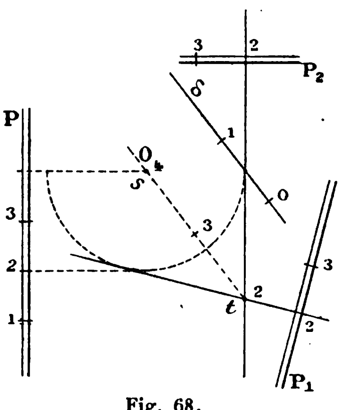


Fig. 68.

Il y a 2 solutions, qui donnent P_1 et P_2 comme dans le cas précédent,

Rotations autour d'un axe horizontal. — Nous avons déjà montré comment on amenait un plan à

être horizontal; c'est la méthode à laquelle on a donné le nom de rabattement; nous allons expliquer comment on peut faire tourner un plan d'un angle quelconque, et comment les points liés invariablement au plan suivent le mouvement de ce plan, dans le cas, seul possible dans la pratique, où l'axe horizontal est parallèle aux horizontales du plan.

Pour cela, nous emploierons un plan vertical auxiliaire perpendiculaire à l'axe horizontal de rotation qui jouera, vis-à-vis de ce plan, le rôle de l'axe vertical.

Pour faire tourner un point ou une droite, on opère sur la projection auxiliaire, comme dans le cas de l'axe vertical.

Amener une droite à être horizontale. — Soit a (2) b (4) une droite quelconque, h (1) l'axe horizontal de rotation.

Prenons un plan vertical auxiliaire V perpendiculaire à h et rabattons-le sur le plan horizontal de cote 1 (fig. 69), h se projette suivant le point h' et ab suivant a' b'.

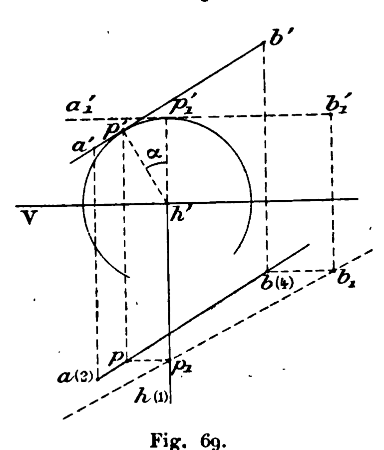


Fig. 69.

En tournant, $a'b'$ enveloppe un cercle de centre h'; AB sera devenue horizontale quand tous ses points auront la même cote, c'est-à-dire quand $a'b'$ sera parallèle à V; il suffit donc de mener $a'_1b'_1$ tangente au cercle, parallèle à V.

Prenons celle des deux solutions qui correspond à l'angle de rotation α; le point p', p reste dans un plan parallèle à V et par conséquent, vient en p'_1, p_1; b' vient en b_1' tel que $p'b' = p'_1\ b'_1$ et horizontalement en b_1; $p_1\ b_1$ est la nouvelle position de la droite devenue horizontale après la rotation.

Rotation d'un plan. — Supposons l'axe h_0 parallèle aux horizontales du plan et projetons sur le plan vertical V perpendiculaire à h, qui se projette suivant le point h' (fig. 70).

En tournant autour de h, la ligne de plus grande pente P′ du plan enveloppe un cercle de centre h', ce qui règle le mouvement du plan.

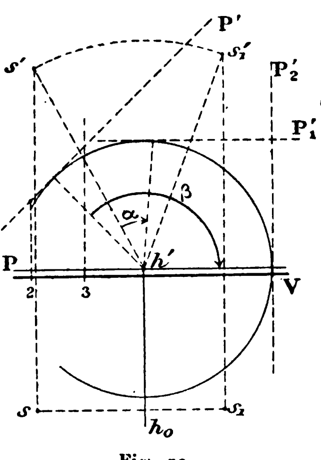


Fig. 70.

Dans l'espace, P reste tangent à un cylindre de révolution dont la trace sur V est le cercle de centre h', tangent à P′.

Pour amener P à être horizontal, il faut faire tourner de l'angle α; pour l'amener à être vertical, de l'angle β, (en prenant l'une des solutions).

Supposons qu'on amène P à être horizontal, (par exemple pour construire un trièdre trirectangle passant par trois points de ce plan) et cherchons quel est le point de P, qui correspond dans P'_1 à un point $s'_1\ s_1$. Faisons tourner s'_1 autour de h' de l'angle α, en sens inverse; il viendra en s' et comme son mouvement s'effectue dans un plan parallèle à V, on obtient s

sur la ligne de rappel de s' d'une part, et sur la perpendiculaire $s_1 s$ à h_0 d'autre part.

On résout de la même façon les questions suivantes :

Amener un plan à passer par un point donné. — Soit m' la projection du point V; il suffit d'amener P' à passer par ce point, c'est-à-dire de mener de m' les tangentes au cercle enveloppe de P'; on obtient ainsi 2 solutions, auxquelles correspondent les nouvelles lignes de pente du plan, facile à graduer. La solution est la même si l'on veut amener le plan à être parallèle à une direction donnée; il suffit d'amener P' à être parallèle à la projection verticale de la direction, c'est-à-dire de mener au cercle enveloppe des tangentes parallèles.

Par le même procédé, on peut amener le plan P à faire un angle donné avec le plan horizontal, puisque cet angle est mesuré par celui de la ligne de plus grande pente avec la trace V du plan vertical.

ANGLES

Angle de deux droites. — On appelle angle de deux droites l'angle des parallèles à ces droites menées par un point de l'espace. On a ainsi deux angles supplémentaires, qu'on peut distinguer en orientant l'espace d'une façon conventionnelle.

Si les droites données ne se rencontrent pas, on mène par un point de l'une d'elles une parallèle à l'autre ; on est ramené au cas de deux droites situées dans un même plan.

Pour déterminer l'angle des deux droites, on amène le plan qui les contient à coïncider avec un plan horizontal, au moyen d'un rabattement ; l'angle est alors figuré en vraie grandeur.

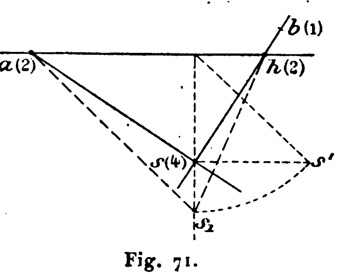


Fig. 71.

Soient les deux droites a (2) s (4), b (1) s (4) qui se rencontrent en un point s. En joignant a au point de cote 2 pris sur bs, on a l'horizontale ah de cote 2. Rabattons le plan ABS autour de ah sur le plan horizontal de cote 2 (fig. 71).

Les points a et h restent fixes, s est rabattu en s_1, d'après la règle du triangle rectangle, ($ss' = 4 - 2 = 2$.)

On a l'angle des deux droites en as_1h.

Cas particuliers. — *Angle d'une droite quelconque avec une droite horizontale.* — La méthode est la même; la droite horizontale sert d'axe pour le rabattement.

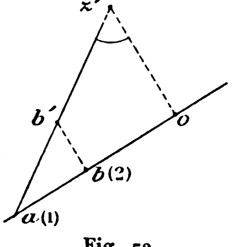


Fig. 72.

Angle d'une droite avec une verticale. — Soit a (1), b(2) la droite et o le pied d'une verticale, qu'on peut prendre sur ab (fig. 72).

Rabattons le plan vertical abo qui contient les deux droites sur le plan horizontal de cote 1, par exemple, b vient en b', a reste fixe et la verticale est rabattue suivant oz' perpendiculaire à $a\ b$.

On a en $az'o$ l'angle cherché.

Plan bissecteur de deux droites qui se coupent. — Rappelons qu'on désigne ainsi le plan perpendiculaire au plan des deux droites mené par une de leurs bissectrices. Il y en a deux qui déterminent le lieu des points de l'espace situés à égale distance des deux droites ainsi que le lieu des droites qui font des angles égaux avec les deux droites et qui passent par leur point de rencontre. Les problèmes qui suivent donnent des exemples de l'utilisation des plans bissecteurs de deux droites.

Trouver sur une droite un point équidistant de deux droites qui se coupent. — Le lieu des points équidistants de deux droites qui se coupent est composé des deux plans bissecteurs des deux droites; l'intersection de la droite donnée avec ces plans donnera deux points répondant à la question.

Soient as, bs, les deux droites (fig. 73) ; ab une horizontale de cote 2 de leur plan. Rabattons ce plan autour de ab sur le plan de cote 2 ; s vient en s_1, (en rabattant par le plus grand angle pour ne pas compliquer l'épure) ; menons la bissectrice s_1c de l'angle

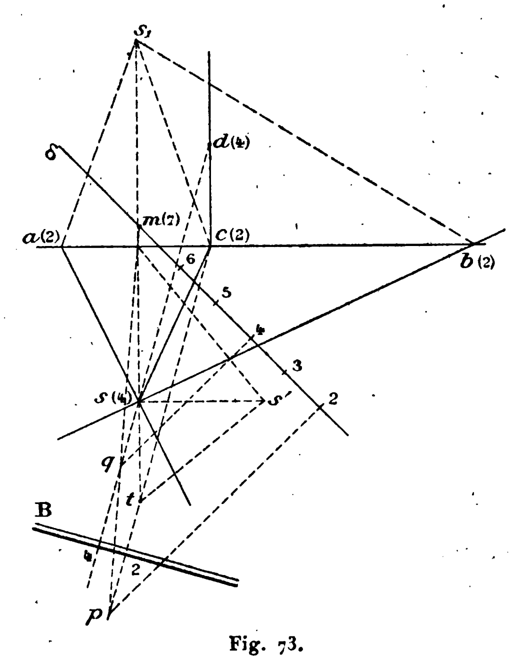


Fig. 73.

as_1b; s_1c se projette en sc, c étant coté 2. Menons par c (2) une perpendiculaire au plan abs; on a le double de l'intervalle réciproque en st, $s't$ étant perpendiculaire à $\sigma s'$. En prenant $cd = st$, sur la perpendiculaire au plan menée par c, c'est-à-dire sur la perpendiculaire à l'horizontale, on a le point d de cote 4, la pente de cd étant ainsi de sens opposé à celle du plan ; scd détermine un des plans bissecteurs ; menons une échelle de pente B de ce plan graduée à l'aide de l'horizon-

tale *sd* et de la parallèle menée par *c* (2) ; il suffit de prendre par la méthode habituelle l'intersection *m* de ce plan avec δ ; on a ainsi sur Δ un point équidistant des deux droites ; nous l'avons obtenu, sur l'épure, en menant par δ un plan quelconque qui coupe B suivant *pq* dont la rencontre avec δ donne le point *m*, de cote 7 environ.

Étant donné un point M *et deux droites* D *et* Δ, *mener par* M *une droite s'appuyant sur la droite* D *et faisant des angles égaux avec les droites* D *et* Δ. — Un premier lieu de la droite cherchée est le plan passant par M et D. Si par M on mène des parallèles D_1 et Δ_1 à D et Δ, le lieu des droites qui font des angles égaux avec D et Δ sera l'ensemble des plans bissecteurs de D_1 et Δ_1 ; l'intersection de chacun de ces plans avec le plan passant par M et D sera une droite répondant à la question.

ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle que fait la droite avec sa projection sur le plan. On sait que c'est le plus petit des angles que fait une droite avec les droites du plan.

Nous avons montré, à propos de la pente d'une droite, comment on détermine l'angle d'une droite avec le plan de comparaison, en rabattant le plan vertical qui projette la droite ; nous n'y reviendrons pas.

Angle d'une droite avec un plan quelconque. — On pourrait déterminer la projection de la droite sur le plan et chercher l'angle de la droite avec sa

projection, comme nous avons déterminé l'angle de deux droites quelconques.

Il est plus simple de remarquer que l'angle cherché est le complément de l'angle formé par la droite avec une perpendiculaire au plan.

Le triangle AB*a* étant rectangle (fig. 74), l'angle en A est complémentaire de l'angle B. On détermine cet angle A comme nous l'avons fait pour deux droites quelconques et l'on prend l'angle complémentaire qui est l'angle cherché. Le problème est simplifié si le plan est vertical, puisque la perpendiculaire est horizontale et peut servir d'axe de rabattement.

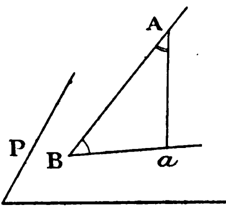


Fig. 74.

ANGLE DE DEUX PLANS

L'angle de deux plans est l'angle des deux droites déterminées dans ces plans par un plan perpendiculaire à leur intersection. Cet angle est appelé le *rectiligne du dièdre*. On voit de suite qu'on pourra ramener la recherche de l'angle de deux plans à celle de l'angle des deux droites ainsi déterminées.

On peut également s'appuyer sur ce que les perpendiculaires (ou normales) aux deux plans, menées d'un point quelconque, font entre elles un angle égal ou supplémentaire de l'angle des deux plans, suivant le dièdre considéré.

Cette méthode est avantageuse dans quelques cas particuliers.

Nous donnons, comme méthode générale, la détermination du rectiligne du dièdre, avec quelques simplifications dans l'exécution de cette méthode.

Supposons déterminées les traces des deux plans sur un même plan horizontal, le plan de comparaison par exemple, ainsi qu'un point de l'intersection avec sa cote par rapport à ce plan horizontal.

Soit le plan P, déterminé par sa trace t_0 et le point a (2) et le plan Q, déterminé par sa trace θ_0 et le même point a (2) (fig. 75).

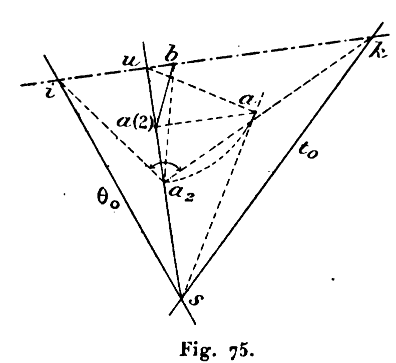
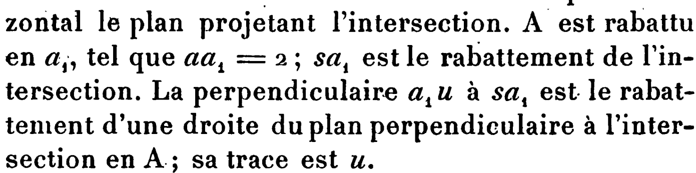


Fig. 75.

L'intersection de P et de Q est sa.

Menons en A un plan perpendiculaire à l'intersection. Sa trace sur le plan horizontal sera perpendiculaire à sa.

Pour avoir un point de cette trace, rabattons sur le plan horizontal le plan projetant l'intersection. A est rabattu en a_1, tel que $aa_1 = 2$; sa_1 est le rabattement de l'intersection. La perpendiculaire a_1u à sa_1 est le rabattement d'une droite du plan perpendiculaire à l'intersection en A ; sa trace est u.



La trace du plan perpendiculaire à l'intersection en A est donc uik, perpendiculaire à sa.

L'angle cherché serait projeté suivant iak. Pour l'avoir en vraie grandeur, rabattons le plan de cet angle sur le plan horizontal autour de sa trace ik ; a est rabattu en a, à une distance de u qui est déjà construite en ua_1 ; l'angle ia_2k est l'angle des deux plans.

Plans bissecteurs de deux plans. — Menons une des bissectrices a_2b de l'angle ia_2k, cette droite est

projetée suivant *ab*, puisque le point *b* reste fixe; elle détermine avec l'intersection un des deux plans bissecteurs; l'autre, qui est perpendiculaire au premier, est déterminé par la deuxième bissectrice et l'intersection.

Rappelons, en passant, que le lieu des points équidistants de deux plans donnés se compose des deux plans bissecteurs.

Cette propriété permet de résoudre le problème suivant :

Trouver sur une droite un point à égale distance de deux plans donnés. — Il y a deux solutions, données par les points d'intersection de la droite avec chacun des plans bissecteurs des deux plans.

Angle d'un plan avec le plan horizontal. — Nous avons montré, à propos de la détermination du plan, que c'était l'angle de la ligne de plus grande pente du plan avec le plan horizontal.

SPHÈRE

Définition de la sphère. — Sa détermination. — La sphère est le lieu des points de l'espace équidistants d'un point fixe. On démontre en géométrie qu'il faut quatre conditions pour déterminer une sphère ; ceci veut dire qu'étant données quatre conditions, si le problème est possible, il aura un nombre limité de solutions ; on sait, par exemple, que par quatre points on peut faire passer une sphère et une seule, tandis que nous serons amenés à discuter le nombre des sphères tangentes à quatre plans.

Sphère passant par quatre points ou sphère circonscrite à un tétraèdre. — Supposons trois des points, A, B, C, amenés dans un plan horizontal en a, b, c (fig. 76), ce que l'on peut toujours faire au moyen d'un rabattement, et un quatrième point donné par sa projection d sur le plan ABC, et sa distance δ au plan ABC, δ étant la cote de d si les 3 points sont donnés dans le plan de comparaison. Le lieu des points équidistants des trois points A, B, C est la perpendiculaire au plan ABC élevée au point o centre du cercle circonscrit au triangle abc.

Le lieu des points équidistants de A et D est le plan perpendiculaire à AD en son milieu.

Pour construire son intersection avec la verticale du point o, prenons comme plan vertical auxiliaire le plan vertical ad; d est projeté en d'; $dd'=\delta$; le plan perpendiculaire au milieu de ad', qui est perpendiculaire au plan vertical auxiliaire, rencontre en o' la verticale, projetée suivant z'.

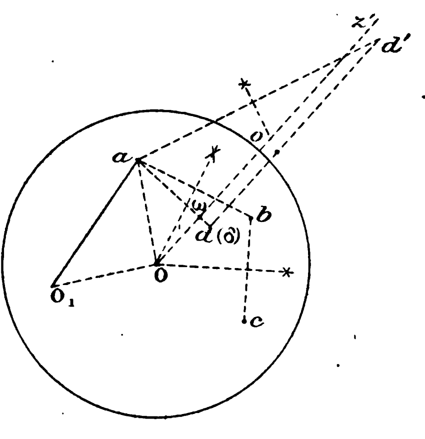


Fig. 76.

oo' est la cote du centre de la sphère, projeté en o. Le rayon est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont oa et $\omega o'$; il est construit en ao_1. Le grand cercle de la sphère qui est dans le plan horizontal du centre est projeté suivant le cercle décrit de o avec o_1a comme rayon.

Sphère circonscrite à un tétraèdre supposé solide. — Plaçons une des faces sur un plan horizontal. Soit ABC (fig. 77). Tout revient à déterminer la cote du quatrième sommet S par rapport au plan ABC, et sa projection sur ce plan; on pourra alors résoudre le problème par la géométrie descriptive en se servant de la méthode précédente.

Rabattons la face BSC autour de BC sur ABC. Connaissant BS_1 et CS_1 on obtient S_1.

S se projette sur la perpendiculaire $S_1\sigma$ à AC; rabattons de même la face ASC; S se projette sur la perpendiculaire de S_2 à AB : s est au point de rencontre de S_2s avec $S_1\sigma$.

La cote de S est le côté d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est σS_1 et l'autre côté $s\sigma$. En construisant ce triangle, on a en sS' la cote de S projeté en s. On est ramené au cas précédent.

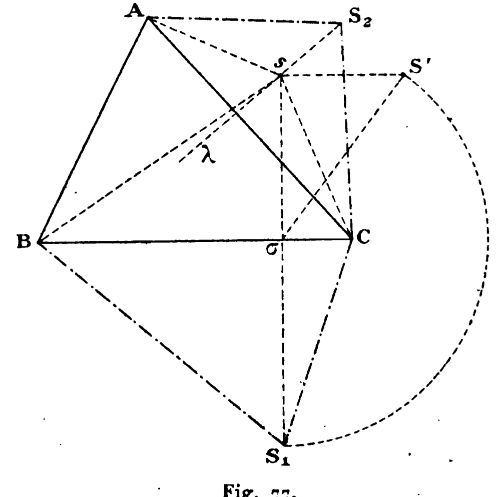


Fig. 77.

Remarque. — La même méthode s'appliquerait si le tétraèdre était donné par les longueurs de six arêtes. On construit les deux triangles BCS_1 et ACS_2, les trois côtés de chacun d'eux étant connus.

Cas général. — Sphère circonscrite à un tétraèdre dont les quatre sommets sont quelconques, a (1), b (4,5), c (0,7), s (6,3) (fig. 78). Le centre de la sphère cherchée, point à égale distance de A, B, C, S, sera à l'intersection des trois plans menés perpendiculairement à AB, BC, CS en leurs milieux. Prenons comme plan vertical auxiliaire le plan projetant AB, qui se trouve rabattue en $a'b'$ sur le plan de comparaison ;

soit m le milieu de $a'b'$, la ligne de plus grande pente du plan perpendiculaire à AB en son milieu est la perpendiculaire $m't$ à $a'b'$.

En opérant de même sur le plan vertical bc, le plan perpendiculaire au milieu P de BC a pour ligne de plus grande pente rabattue la perpendiculaire $p'\theta$ au milieu de $c_1 b_1$.

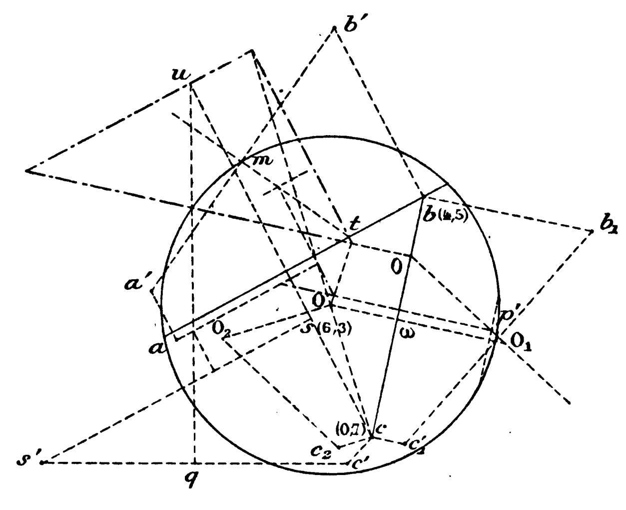


Fig. 78.

Enfin, le rabattement du plan cs donne qu pour ligne de pente du plan perpendiculaire à CS' en son milieu.

Pour avoir le point commun à ces trois plans, nous avons coupé par le plan de comparaison, puis par le plan de cote 2, et obtenu ainsi deux triangles homothétiques marqués en traits mixtes. Le centre d'homothétie donne la projection du centre o cherché ; on en a la cote en se servant de l'un des plans, par exemple en ωo_1. Le rayon de la sphère est la distance

du point o au point c, obtenue par le rabattement ordinaire en o_2c_2.

Sphères tangentes à quatre plans. — Sphères inscrites et exinscrites à un tétraèdre. — Nous allons montrer qu'il y a toujours cinq sphères tangentes à quatre plans, et qu'il peut y en avoir huit au plus.

Supposons que les quatre plans forment un tétraèdre, dont les faces sont prolongées indéfiniment dans tous les sens.

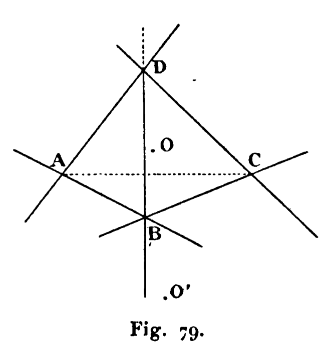


Fig. 79.

On conçoit une sphère inscrite dans l'intérieur du tétraèdre DABC, on en conçoit une également située dans l'intérieur du trièdre de sommet D, mais située du côté opposé à D par rapport au plan ABC; il y en a quatre de cette deuxième espèce, dites exinscrites, situées de la même façon par rapport aux trièdres de sommet D, A, B, C. Ces cinq sphères existeront toujours (fig. 79).

Il ne peut y en avoir dans les trièdres symétriques de ceux que nous avons considérés, par exemple dans le trièdre opposé à D par le sommet.

Si l'on considère les deux couples de plans qui ont pour arêtes deux côtés opposés, par exemple DA et BC, ces quatre plans forment ce qu'on appelle un *comble*[1]. Dans un tétraèdre, il y a six combles.

[1] Cette appellation correspond à ce qu'on appelle comble en architecture. Pour se représenter un comble, il n'y a qu'à regarder le toit d'une maison (fig. 80).

La discussion va montrer que les cinq sphères citées plus haut existent toujours et qu'il peut y en avoir encore trois dans trois des combles.

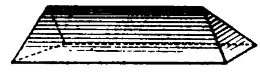


Fig. 80.

Discussion. — *Sphère inscrite.* — Soit O le centre de la sphère inscrite dans l'intérieur du tétraèdre DABC. Joignons OA, OB, OC, OD, et abaissons de O sur les quatre faces les perpendiculaires dont la longueur égale le rayon de la sphère inscrite.

Soit :

V_a le volume du tétraèdre ODBC,
V_b — OACD,
V_c — OBDA,
V_d — OCAB,
V — DABC,
h_a la hauteur issue de A sur la base B_a
h_b — B — B_b
h_c — C — B_c
h_d — D — B_d
r le rayon de la sphère.

On a :

$$\frac{V_a}{V} = \frac{r}{h_a}; \quad \frac{V_b}{V} = \frac{r}{h_b}; \quad \frac{V_c}{V} = \frac{r}{h_c}; \quad \frac{V_d}{V} = \frac{r}{h_d}.$$

En ajoutant et remarquant que :

$$V_a + V_b + V_c + V_d = V,$$

on a :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}.$$

Cette équation détermine r, qui existe toujours, le second membre étant positif.

Sphères exinscrites. — Supposons le point O dans l'intérieur du trièdre D, mais du côté opposé à D par rapport au plan ABC. Joignons-le comme précédemment aux quatre sommets.

Soit r_d le rayon de la sphère exinscrite.

On aura :

$$V = V_a + V_b + V_c - V_d,$$

et par suite :

$$\frac{1}{r_d} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_d}.$$

Je dis que r_d est positif.

On a :

$$B_a h_a = B_b h_b = B_c h_c = B_d h_d = 3V,$$

ou :

$$\frac{B_a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{B_b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{B_c}{\frac{1}{h_c}} = \frac{B_d}{\frac{1}{h_d}} = \frac{B_a + B_b + B_c - B_d}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_d}} = 3V.$$

Or, dans un tétraèdre, une face quelconque est plus petite que la somme des trois autres ; donc le numérateur du dernier rapport est positif ; la valeur commune des rapports, 3V, étant positive, il s'ensuit :

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_d} > 0.$$

Donc r_d existe ; il en est de même de r_a, r_b, r_c.

Sphères dont le centre serait dans l'intérieur du trièdre opposé aux trièdres tels que D *par le sommet.* — On aurait dans ce cas :

$$\frac{1}{r_d} = -\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}.$$

D'après le même raisonnement que précédemment, on voit que le second membre est toujours négatif. Donc les quatre sphères répondant à cette hypothèse n'existent pas.

Sphères inscrites dans les combles. — Dans ce cas, V est égal à la somme des volumes de deux tétraèdres, diminuée de la somme des deux autres : ρ étant le rayon d'une des sphères, il y a six combinaisons pour la valeur de $\frac{1}{\rho}$, donnant des valeurs deux à deux égales et de signe contraire :

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_d} \text{ et } -\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_d}.$$

Il n'y a douc que trois valeurs possibles pour ρ.

REMARQUE. — Il peut se faire, dans ce dernier cas, que la somme de deux faces soit égale à la somme des deux autres ; on a alors :

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}=\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_d}$$

c'est-à-dire $\frac{1}{\rho}=0$, égalité qui ne peut être satisfaite que pour ρ infini.

Nous verrons plus loin que, dans ce cas, la sphère est rejetée tout entière à l'infini.

En résumé, la sphère inscrite et les quatre exinscrites existent toujours ; il peut y avoir trois sphères inscrites dans les combles ; il y a donc cinq solutions au moins, et huit au plus.

Sphère inscrite. — Méthode d'écrasement. — Nous donnons d'abord cette méthode, parce qu'elle fera bien comprendre la discussion faite plus haut.

Si nous abaissons du centre o de la sphère les perpendiculaires sur les faces, nous obtenons les points de contact α, β, γ, δ (fig. 81).

Abaissons de γ, par exemple, $\gamma\lambda$ perpendiculaire à AB.

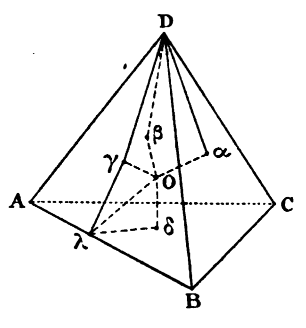


Fig. 81.

Les deux triangles rectangles $o\gamma\lambda$, $o\lambda\delta$ sont égaux, puisque $o\gamma = o\delta = r$.

Donc $\gamma\lambda = \lambda\delta$.

Rabattons la face DAB sur ABC, de manière que le point D vienne du même côté que C par rapport à AB; le rabattement de γ coïncide avec δ; il en est de même pour les points α et β, si on rabat les faces qui les contiennent de la même manière.

De plus, les longueurs $D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$ sont égales comme tangentes issues de D à une même sphère. Soient $D_1D_2D_3$ les trois rabattements de D ; le point δ, avec lequel coïncident α, β, γ, et qui est la projection de o sur ABC, sera équidistant de D_1, D_2, D_3 ; c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle $D_1D_2D_3$.

Ayant la projection du centre de la sphère sur le plan ABC, on mène en ce point une perpendiculaire au plan ABC, et on prend son intersection avec un des plans bissecteurs intérieurs, ce qui donne le centre de la sphère.

Remarque. — Cette méthode est à employer dans le cas où l'on donne un tétraèdre solide, ou bien si le tétraèdre est donné par les six longueurs de ses arêtes.

Plaçons une face ABC du tétraèdre sur le plan de comparaison (fig. 82) ; la face BDC est rabattue en BD_1C, D_1 étant pris du même côté que A par rapport à BC, connaissant les longueurs BD_1 et CD_1 par hypothèse.

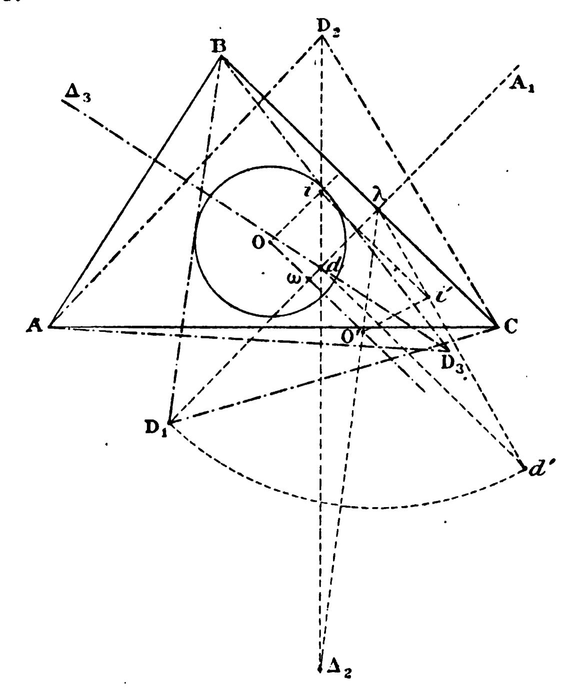


Fig. 82.

On obtient de même les points D_2 et D_3. Le point *o* centre du cercle circonscrit au triangle $D_1D_2D_3$ est la projection du centre de la sphère sur le plan ABC.

Pour avoir la cote du centre et le rayon de la sphère, qui sont des longueurs égales, on cherche la projection *d* du sommet D, obtenu à l'intersection des perpendiculaires menées de D_1 à BC et de D_2

à AC, puisque le relèvement d de D doit se trouver sur les perpendiculaires aux axes de rabattement. On détermine le plan bissecteur du dièdre dont l'arête est AC, en prenant pour plan vertical auxiliaire le plan de trace dD_1.

Le point D se projette en d' ($\lambda d' = \lambda D_1$) par la construction inverse du rabattement; la bissectrice de l'angle $d\lambda d'$ est la trace du plan bissecteur. Le centre de la sphère est alors projeté en o' ; $\omega o'$ donne la cote du centre et le rayon de la sphère inscrite.

En menant par le point (o,o') la perpendiculaire $(oi, o'i')$ au plan de la face DBC, on a en (i') le contact de la sphère avec cette face.

On obtiendrait de même les autres contacts.

Sphères exinscrites. — Pour avoir la projection o_1 du centre de la sphère intérieure au trièdre de sommet A, mais située au delà du plan BCD, il faut obtenir la superposition des points de contact avec le point o_1, c'est-à-dire rabattre extérieurement la face opposée à A, en prenant Δ symétrique de D_1 par rapport à BC ; les deux autres faces donnent comme précédemment D_2 et D_3 ; on prendrait o centre du cercle circonscrit au triangle $\Delta_1 D_2 D_3$. On aurait de même les sphères ex-inscrites o_2 et o_3. Celle qui est à l'intérieur du trièdre D aura son centre au centre du triangle $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$, obtenu en rabattant les trois faces vers l'extérieur.

Sphères inscrites dans les combles. — Pour avoir les projections des centres confondues avec les rabattements des points de contact, il faut rabattre deux faces extérieurement, et la troisième intérieurement.

On aura donc pour projections des centres les

centres des cercles circonscrits à $D_1\Delta_2\Delta_3$, $D_2\Delta_3\Delta_1$, $D_3\Delta_1\Delta_2$; on voit qu'il n'y en a que trois de possibles, ce qui tient à ce que, quand il y a une sphère dans un comble, il ne peut pas y en avoir dans le comble opposé, de même qu'il ne peut y avoir de sphère intérieure, par exemple, au trièdre opposé à A par le sommet.

Si les trois points $D_1\Delta_2\Delta_3$ sont en ligne droite, le centre est rejeté à l'infini ; la sphère l'est également dans ce cas.

Cette particularité peut se produire pour les trois sphères inscrites dans les combles ; on verrait facilement que c'est le cas où la somme de deux faces est égale à la somme des deux autres.

Les cinq autres sphères existent toujours.

Autre méthode. — Déterminons trois des plans bissecteurs intérieurs ; nous obtiendrons le centre de la sphère, point commun à ces trois plans, en coupant les trois plans par deux plans parallèles.

Le centre d'homothétie des triangles déterminés par ces deux plans donnera le point cherché.

Pour faire l'épure, supposons une base ABC du tétraèdre dans le plan horizontal. D est donné par sa projection d (4).

Menons les plans bissecteurs intérieurs des dièdres AB, BC, CA (fig. 83).

Le dièdre suivant AB est obtenu en coupant par le plan vertical mené par d perpendiculaire à AB.

D se projette sur ce plan en d_3 ; $dd_3 = 4$.

La bissectrice de l'angle $d\delta d_3$ détermine avec AB le plan bissecteur cherché.

De même pour les deux autres dièdres.

Coupons les trois plans bissecteurs par deux plans

horizontaux; le plan horizontal de projection donne le triangle ABC.

Un autre plan horizontal donne les horizontales h_1, h_2, h_3, de même cote, obtenues en prenant sur les

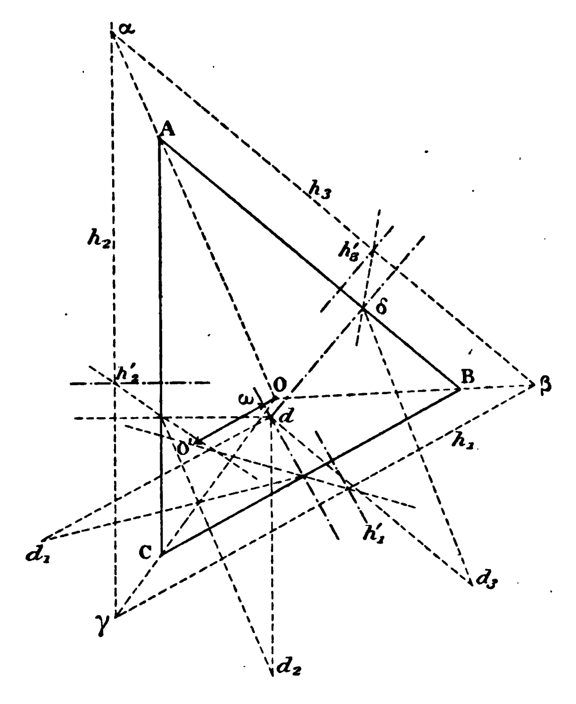


Fig. 83.

projections auxiliaires les horizontales h'_1, h'_2, h'_3; leurs points de rencontre avec les bissectrices donnent les points par où passent h_1, h_2, h_3.

Ces trois droites déterminent un triangle αβγ homothétique de ABC; le centre d'homothétie *o* est la projection du centre de la sphère.

Pour avoir sa cote, il suffit de prendre sa projection *o'* sur la trace du plan bissecteur du dièdre BC,

par exemple. La cote est la distance $\omega o'$, c'est également le rayon de la sphère.

En combinant les plans bissecteurs intérieurs et extérieurs, on obtient les sphères exinscrites et celles inscrites dans les combles, si elles existent.

Sphère passant par trois points et tangente à un plan. — Soit P le plan auquel la sphère doit être tangente ; A, B, C, les trois points donnés (fig. 84).

Joignons AB qui rencontre P en M ; K étant le point de contact cherché, MK sera une tangente à la sphère.

La puissance de M par rapport à la sphère est $\overline{MK}^2 = MA \times MB$.

On connaît MA et MB ; on peut donc construire MK en faisant passer un cercle quelconque par A et B et menant de M une tangente dont la longueur sera égale à MK ; on peut de même construire QK.

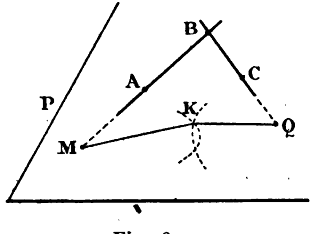


Fig. 84.

Les cercles décrits de M avec MK et de Q avec QK comme rayons se coupent en deux points qui conviennent pour le contact des sphères passant par A, B, C et tangentes au plan P. Il y a donc deux solutions qui peuvent être confondues, si les deux cercles sont tangents.

Pour que le problème soit possible, il faut que les trois points soient situés d'un même côté par rapport au plan.

Epure. — Soit un plan P donné par sa trace t et un point s (4), et les trois points a (1), b (1,4), c (0,7) (fig. 85).

Nous prenons l'intersection M de AB avec P en prenant pour plan vertical auxiliaire le plan projetant AB et le rabattant sur le plan horizontal ; la trace de P sur ce plan vertical est fr', r étant obtenu par l'intersection avec l'horizontale du point S du plan de cote 4 ; $a'b'$ est la projection de AB. Cette

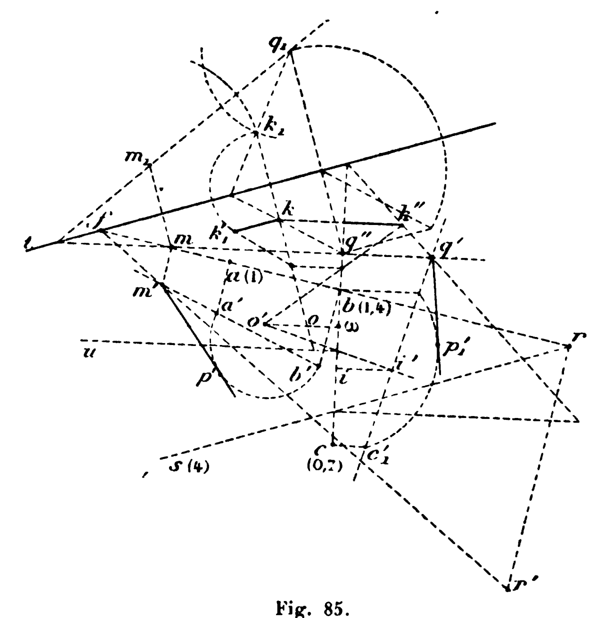


Fig. 85.

trace rencontre $a'b'$ en m' projeté en m. La puissance de M par rapport à la sphère cherchée est le produit $m'a' \times m'b' = \overline{m'p'^2}$, obtenu en faisant passer un cercle quelconque par a' et b'.

Si l'on rabat le plan P sur le plan horizontal autour de t, m est rabattu en m_1, déterminé comme d'habitude.

De même BC coupe P en Q dont on a la puissance $\overline{q'p'_1{}^2}$. Q est rabattu en q_1, obtenu par homologie.

Les cercles décrits de p_1 avec $m'p'$ et de q_1 avec $q'p'_1$ se rencontrent en deux points ; prenons K_1 relevé en K.

Le centre de la sphère cherchée sera à l'intersection de la perpendiculaire $K\theta$ élevée au plan P en K. dont nous avons déterminé la trace θ, avec, par exemple, le plan mené perpendiculairement à BC en son milieu (i, i').

Ce plan étant déterminé par sa trace u et le point (i, i'), nous avons pris son intersection avec $K\theta$ en projetant la droite $K\theta$ sur le plan vertical de trace bc. Sa projection verticale $K''\theta$ coupe la trace du plan au point o' projeté en o.

Le point o, de cote $\omega o'$, est le centre de la sphère qui touche le plan en K_1. On aurait la deuxième solution de la même manière.

Autre méthode. — Considérons le cercle de centre o circonscrit au triangle ABC (fig. 86).

Le centre de la sphère cherchée sera sur la perpendiculaire en o au plan ABC.

Menons par cette droite ov un plan perpendiculaire au plan P, qui coupe P suivant la droite TR.

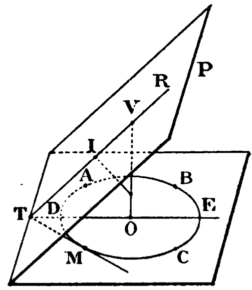


Fig. 86.

Ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle qui passe par les points D et E, intersections de sa trace sur le plan ABC avec le cercle circonscrit au triangle ABC, puisque ce cercle est sur la sphère cherchée.

De plus, le contact de la sphère et du plan P aura lieu sur la droite TR ; on est ramené à tracer, dans le plan TOR, un cercle passant par deux points D et E, et tangent à une droite TR.

Le point de contact I de ce cercle avec TR sera tel que :

$$\overline{TI}^2 = TD \times TE.$$

Donc TI = TM, tangente menée de T au cercle ABGDE.

Le centre du grand cercle ainsi déterminé est le centre de la sphère.

Cette méthode donne lieu à des constructions très simples quand les trois points A, B, C sont dans le plan horizontal.

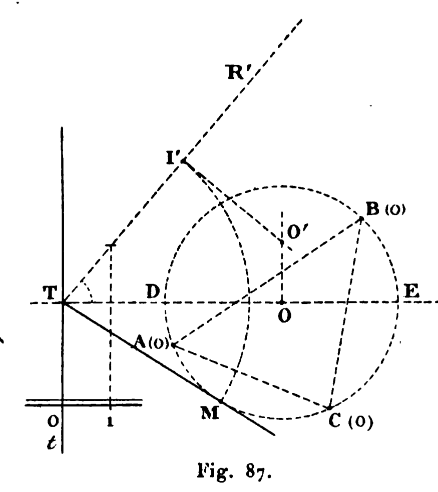


Fig. 87.

Supposons le plan P donné par son échelle de pente (fig. 87).

Menons par la verticale du point *o*, centre du cercle circonscrit, un plan *o*T perpendiculaire au plan P; rabattons ce plan sur le plan horizontal. L'intersection avec le plan P est rabattue en TR′, rabattement d'une ligne de pente du plan.

En prenant TI′ = TM et élevant en I′ la perpendiculaire à TR′, on obtient en *o*′ le centre du grand cercle passant par les points D et E et tangent à SR′, c'est-à-dire le centre de la sphère cherchée.

Ce centre est projeté en *o*; sa cote est *oo*′; son rayon est *o*′I′.

Sphère passant par un point et tangente à trois plans. — Nous supposons que les trois plans forment

un trièdre, c'est-à-dire qu'ils se coupent en un point unique S.

Soit le point M par lequel doit passer la sphère (fig. 88).

Toutes les sphères tangentes aux trois plans dans l'intérieur du trièdre où se trouve le point M ont leurs centres sur la droite Sω, suivant laquelle se coupent les trois plans bissecteurs intérieurs des dièdres suivant SA, SB, SC.

On obtient Sω en prenant l'intersection de deux de ces plans bissecteurs.

Fig. 88.

Prenons une sphère quelconque, de centre ω, tangente aux trois plans. La sphère cherchée sera homothétique de la sphère ω, le centre d'homothétie étant le point S.

Cherchons sur la sphère ω un point homothétique de M; nous en obtenons deux μ et μ_1 à l'intersection de SM avec cette sphère; prenons μ par exemple; le rayon $\mu\omega$ doit être parallèle à MO, o étant le centre de la sphère cherchée; on a donc la direction de MO; o sera à l'intersection de MO avec Sω.

Une deuxième solution serait donnée par $\mu_1\omega$; la parallèle menée par M donne sur Sω un autre centre o_1.

Dans chaque solution, la sphère est déterminée par son centre et son rayon. On pourra faire l'épure lorsque nous aurons montré comment on prend l'intersection d'une droite et d'une sphère.

Sphère passant par trois points et tangente à une droite. — Soient trois points A, B, C et une droite D.

Dans le plan ABC, faisons passer un cercle par les trois points A, B, C (fig. 89).

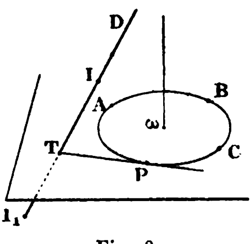


Fig. 89.

Ce cercle sera tout entier sur la sphère cherchée, dont le centre devra, par conséquent, se trouver sur la perpendiculaire élevée en ω, centre du cercle, au plan ABC.

Soit I le point de contact de la droite D et de la sphère, et T la trace de D sur le plan ABC.

Menons la tangente TP au cercle ω.

On a TP = TI, comme tangentes issues d'un même point à une sphère. On construit donc TP, et l'on porte cette longueur sur D à partir de I en TI ou TI_1; le point I, par exemple, est le point où la sphère cherchée est tangente à D; le plan perpendiculaire à D au point I contient le centre de la sphère; le centre est donc à l'intersection de ce plan avec la perpendiculaire élevée en ω au plan ABC.

Le point I_1 donne une deuxième solution. Pour que le problème soit possible, il faut que le point T soit extérieur au cercle ω.

Soient, par exemple, les trois points *a* (2), *b* (2), *c* (8), (fig. 90) *a* et *b* étant de même cote 2, et une droite *d*, donnée par sa trace horizontale t_0 et l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal. Rabattons le plan *abc* sur le plan horizontal de cote 2, autour de l'horizontale *ab*; *c* est rabattu en c_1.

Traçons le cercle circonscrit au triangle abc_1, de centre ω_1.

Cherchons la trace de la droite *dt* sur le plan des trois points; pour cela coupons par le plan vertical qui le projette horizontalement et prenons ce plan comme plan vertical, en le rabattant sur le plan hori-

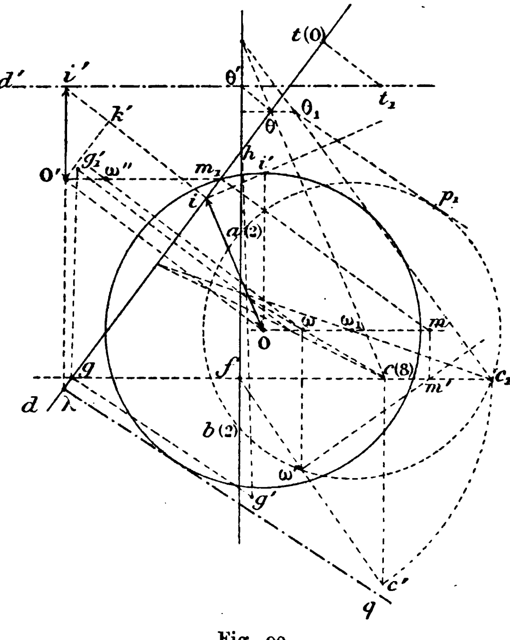


Fig. 90.

zontal de cote α; le point t se projette en t_1 ($tt_1 = 2$), et la droite est projetée en $d't_1$.

La droite *ab* coupe le plan vertical au point h, la droite *fc* du plan des trois points la coupe au point g dont la cote est gg'_1 et qui se projette en g'; hg' est donc l'intersection du plan vertical avec le plan des trois points.

Le point d'intersection de la droite et du plan est le point (θ', θ) rabattu par homologie en θ_1 sur le plan horizontal de cote α autour de *ab*.

Menons la tangente $\theta_1 p_1$ et portons cette longueur sur la droite D, à partir de θ, en nous servant de la projection auxiliaire d'.

Portons $\theta' i' = \theta_1 p_1$; le point i', projeté en i, est le point de contact avec la droite d'une sphère répondant à la question.

Menons en ce point un plan perpendiculaire sur la droite; ce plan est $i'\lambda q$, λq est sa trace horizontale.

Relevons ω_1 en ω par homologie et élevons en ω une perpendiculaire au plan ABC; elle est projetée horizontalement en ωm; sa projection sur le plan vertical fc_1 est $\omega' m'$ et sa trace sur le plan de cote 2 est le point (mm').

Prenons la projection de cette droite sur le plan vertical dt; c'est $\omega'' m_1$ qui rencontre en o', projeté en o, la trace verticale du plan perpendiculaire en (ii') à D.

Le point o,o' est centre d'une sphère répondant à la question. Son rayon est la vraie grandeur de oi, $o'i'$, obtenue en oi, ii, étant la différence $i'k'$ des cotes de o et de i.

Sphère passant par deux points et tangente à deux plans. — Le centre de la sphère cherchée se trouve dans un plan bissecteur des deux plans, celui de l'angle dans lequel se trouvent les deux points. Soit B ce bissecteur, M et P les deux points. Le plan B passe par le centre de la sphère; donc le symétrique M_1 du point M, par exemple, par rapport à B, appartient à la sphère; nous sommes ramenés à un problème déjà traité: faire passer par trois points M, P, M_1, une sphère tangente à un plan, l'un des deux plans donnés.

Sphère passant par deux points et tangente à deux droites qui se coupent. — Soient A et B les deux points; D et Δ les deux droites qui se coupent.

Le lieu des points équidistants de deux droites qui se coupent est l'ensemble de leurs plans bissecteurs, β_1 et β_2, plans menés par les bissectrices perpendiculairement au plan des deux droites.

Prenons, par exemple β_1. Ce plan contiendra le centre de la sphère; c'est donc un plan diamétral, et la sphère passera par le symétrique A_1 de A par rapport à ce plan.

On est ramené à faire passer une sphère par A, B, A_1, tangente à la droite D ou à la droite Δ.

L'autre plan bissecteur donne un deuxième couple de solutions.

Sphère de rayon donné, passant par un point, et tangente à deux sphères données. — Lorsque deux sphères sont tangentes, la distance des centres est égale à la somme des rayons ou à leur différence, si les sphères sont tangentes intérieurement.

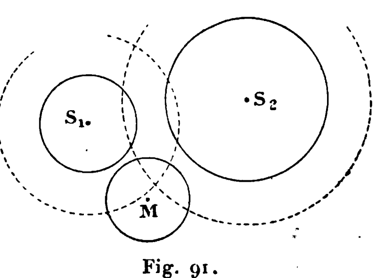


Fig. 91.

Dans la première hypothèse, le centre de la sphère cherchée sera sur la sphère concentrique à S_1 dont le rayon égale la somme des rayons; ce centre devra se trouver également sur une sphère concentrique à S_2. Enfin, ce centre est à une distance du point donné M égale au rayon donné. Il se trouve donc sur une sphère décrite, de M comme centre, avec le rayon donné (fig. 91).

Les points communs aux trois sphères donnent deux solutions, comme il sera montré plus loin. La discussion du problème se fait sans difficulté.

Sphère tangente aux trois arêtes d'un trièdre et à un plan donné. — Soient SA, SB, SC les trois arêtes, P le plan donné (fig. 92).

Le centre d'une sphère quelconque tangente aux trois droites se trouve sur le lieu des points équidistants de ces trois droites, c'est-à-dire sur la droite par laquelle passent les trois plans bissecteurs des droites prises deux à deux (nous ne considérons ici que les plans bissecteurs tels que leur intersection soit à l'intérieur du trièdre).

Soit SΔ cette intersection qu'on obtient facilement en prenant SA = SB = SC et en menant aux points A, B, C des plans perpendiculaires à SA, SB SC. On obtient ainsi un point ω. Sω est le lieu des centres des sphères tangentes aux trois droites. Du point ω, avec un rayon ωA, décrivons une sphère; elle est tangente aux trois droites et de plus, homothétique de la sphère cherchée, le centre d'homothétie étant le point S.

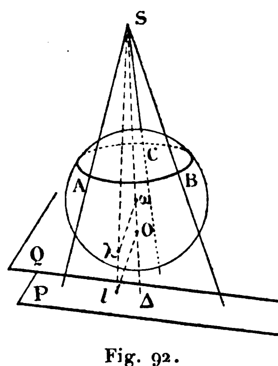


Fig. 92.

Menons à la sphère ω un plan tangent Q parallèle à P (problème résolu plus loin). Soit λ le point de contact. Le point de contact de la sphère cherchée avec le plan P est homothétique de λ; il est donc à l'intersection *l* de Sλ avec P.

En menant par *l* une parallèle au rayon λω, c'est-à-

dire une perpendiculaire au plan P, on obtient en *o* le centre d'une sphère répondant à la question, dont le rayon est *ol*.

Comme on peut mener à la sphère ω deux plans tangents parallèles à P, il y a deux solutions.

On aurait toutes les solutions du problème en prenant les autres plans bissecteurs des deux droites. La discussion est la même que pour la détermination des cônes de révolution passant par trois droites concourantes. (Voir plus loin.) Nous ne faisons pas l'épure puisqu'elle n'exige pas de procédé nouveau.

La même méthode donnerait la solution des problèmes suivants : *Sphère tangente aux trois arêtes ou aux trois faces d'un trièdre et tangente à une sphère donnée.*

Dans certains cas, les propriétés des figures inverses permettent de simplifier la solution d'un problème.

Mener, par un point donné M, une sphère tangente à trois sphères données S_1, S_2, S_3.

Prenons comme pôle d'inversion un point P commun aux trois sphères, et comme puissance d'inversion $\overline{PM}^2$.

Le pôle étant sur S_1, S_2, S_3, on sait que la figure inverse de chacune des sphères est un plan perpendiculaire à la ligne qui joint P au centre de chacune des sphères.

Le point M ne change pas ; on est ramené à trouver une sphère passant par un point et tangente à trois plans.

Ce problème résolu, on prend la sphère inverse de la sphère trouvée, on a la sphère demandée.

PLANS TANGENTS A LA SPHÈRE

Plan tangent à la sphère en un point de sa surface. — On démontre, en géométrie analytique, qu'il existe en général un plan qui contient les tangentes en un point d'une surface à toutes les courbes tracées sur la surface par ce point ; ce plan est, par définition, le plan tangent à la surface.

Pour la sphère, le plan tangent est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact, puisque ce plan tangent contient les tangentes à deux grands cercles passant par le point, tangentes qui sont toutes deux perpendiculaires au rayon de leur grand cercle, c'est-à-dire au rayon de la sphère.

Contour apparent de la sphère. — Le grand cercle qui est dans le plan horizontal du centre se projette horizontalement en vraie grandeur ; tout ce qui est sur la surface se projette à l'intérieur de ce grand cercle.

En un point de ce cercle, le plan tangent est vertical, puisqu'il contient la tangente au grand cercle vertical qui passe par le point et que cette tangente est verticale.

Ce cercle s'appelle le *contour apparent* horizontal de la sphère.

Si l'on suppose un observateur placé à l'infini dans une direction perpendiculaire au plan horizontal, ce grand cercle sépare les parties de la sphère vues des parties cachées. D'où le nom de contour apparent.

Prendre un point sur la surface de la sphère. — Étant donnée la projection horizontale m d'un point

de la surface de la sphère, trouver la cote et le plan tangent en ce point.

Soit m le point donné à l'intérieur du contour apparent. Considérons le plan vertical om, et rabattons-le sur le plan horizontal du centre (fig. 93), de cote 3.

Le grand cercle déterminé par le plan vertical om est rabattu suivant le grand cercle de contour apparent, puisque o reste fixe ; si m est la projection d'un point de la sphère, M est rabattu en m_1 ou en m_2 ; on a sa cote mm_1 qu'on peut porter au-dessus ou bien au-dessous du plan horizontal du centre. Il y a deux solutions : c'est-à-dire que la verticale du point m rencontre la sphère en deux points, de cotes $3 \pm mm_1$, mm_1 étant mesuré à l'échelle des cotes.

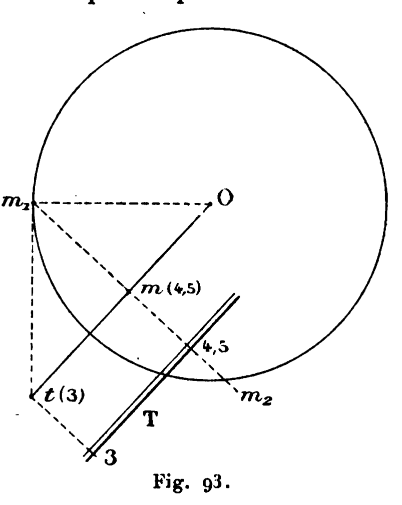


Fig. 93.

Remarque. — Nous avons employé, pour trouver l'intersection de la verticale avec la sphère, la même méthode que pour l'intersection d'une droite et d'un plan. Nous avons fait passer par la verticale un plan auxiliaire ; ce plan coupe la sphère suivant un cercle dont nous avons pris l'intersection avec la verticale.

Plan tangent en m. — C'est le plan perpendiculaire en m au rayon om. Supposons $mm_1 = 1,5$, m a

la cote 4,5, en prenant M au-dessus du centre. Le plan tangent a son échelle de pente T parallèle à *om*, graduée avec l'intervalle réciproque que nous avons construit en *mt*, correspondant à un intervalle et demi.

Remarque. — Le plan tangent en un point d'une sphère a pour trace sur le plan horizontal du centre la polaire de la projection du point sur ce plan par rapport au grand cercle de contour apparent de la sphère (fig. 94).

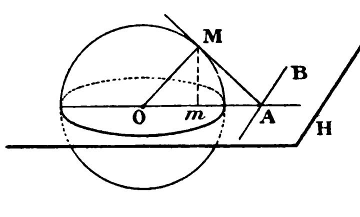


Fig. 94.

Soit H le plan horizontal du centre, M un point de la sphère projeté en *m*.

Le plan tangent contient la tangente au grand cercle C perpendiculaire au plan H, tangente dont la trace est A ; la trace de ce plan tangent est la droite AB perpendiculaire sur *om*.

On a :

$$om.\mathrm{OA} = \overline{\mathrm{OM}}^2 = \mathrm{R}^2.$$

Le point A est un point de la polaire de *m* par rapport au cercle γ situé dans le plan H et AB est la polaire de ce point.

On voit que cette remarque amène à des constructions identiques à celle de la figure 89, interprétées d'une façon différente.

Graduation de la sphère. — En prenant pour échelle un rayon, on peut se proposer de marquer les points de passage des cercles horizontaux à cote

ronde. Les intervalles ainsi obtenus, quoique inégaux, peuvent servir à évaluer approximativement la cote d'un point de la surface de la sphère donné par sa projection. Ces cercles sont des lignes de niveau de la sphère, et peuvent servir à en figurer quelque peu le relief.

Soit une sphère de centre *o* (5) tangente au plan de comparaison, ce qui veut dire que le rayon vaut 5 unités de l'échelle des cotes (fig. 95).

Considérons un plan vertical *ov* et rabattons-le sur le plan horizontal 5. Le grand cercle de la sphère est rabattu suivant le grand cercle de contour apparent. Divisons le rayon vertical, rabattu en *oz'*, en cinq parties égales.

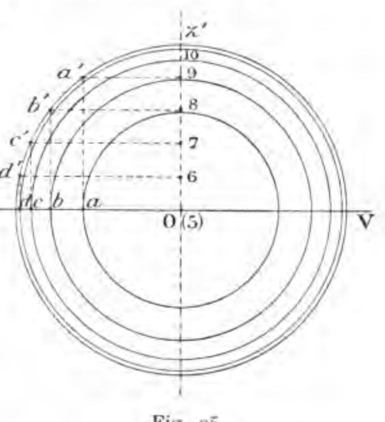


Fig. 95.

Nous obtenons ainsi les points *d'* de cote 6, *c'* de cote 7, *b'* de cote 8, *a'* de cote 9 sur le grand cercle vertical; ces points se projettent en *d*, *c*, *b*, *a* et l'on peut tracer les petits cercles horizontaux de cotes 6, 7, 8, 9 passant par ces points ; ces cercles correspondent également à des cercles de même cote relative, mais situés au-dessous du contour apparent.

Intersection d'une droite et d'une sphère. — *Trouver sur une droite un point à une distance donnée d'un point donné.* — Le lieu des points situés à une distance donnée d'un point est la sphère décrite

de ce point comme centre avec la distance donnée pour rayon. Pour avoir ceux de ces points situés sur la droite, on prend l'intersection de la droite et de la sphère.

Faisons passer par la droite et le centre de la sphère un plan, qui coupe la sphère suivant un grand cercle ; pour avoir les points d'intersection de la droite avec ce grand cercle, on rabat le plan qui les contient sur le plan horizontal ou sur le plan de front du centre de la sphère. On obtient ainsi les rabattements des points d'intersection, dont on détermine les projections.

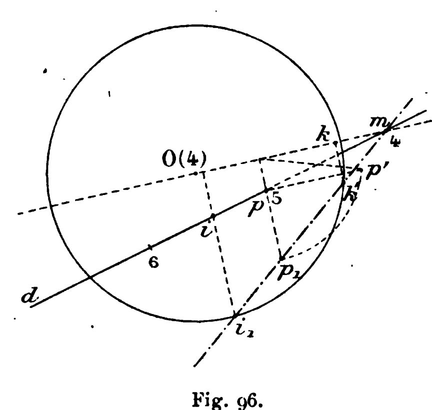


Fig. 96.

Appliquons ce procédé : soit une sphère donnée par son centre *o* (4) et son rayon ; *d* la droite donnée par sa projection graduée (fig. 96).

L'horizontale de cote 4 du plan passant par la droite et le centre est *om*. Rabattons ce plan autour de *om* sur le plan horizontal du centre.

Le grand cercle de la sphère est rabattu suivant le cercle *o*.

Un point *p* (5) de cote 1 par rapport au plan horizontal du centre est rabattu en p_1, p_1 étant égal à l'unité de l'échelle des cotes ; p_1m est le rabattement de la droite ; i_1 et K_1 sont les rabattements des points d'intersection. Ils sont projetés en *i* et *k* sur la droite *d*.

On aurait pu également couper par le plan vertical *d* et rabattre la droite ainsi que le petit cercle d'intersection ; mais la méthode précédente est plus simple.

SECTION PLANE DE LA SPHÈRE

Soit une sphère de centre *o* (1) dont on connaît le rayon, ce qui permet de tracer le contour apparent horizontal (fig. 97).

Le plan P est donné par son échelle de pente.

Détermination d'un point et de la tangente. — Coupons par le plan horizontal de cote 3, par exemple.

Il donne dans le plan sécant l'horizontale h_3, et dans la sphère un petit cercle horizontal, projeté suivant un cercle de centre *o* ; pour avoir son rayon, coupons par un plan vertical *ov* et rabattons-le sur le plan horizontal du centre. Le cercle d'intersection est rabattu suivant le grand cercle *o* ; la projection du cercle de la sphère situé dans le plan horizontal de cote 3 est $\alpha'\beta'$ parallèle à *ov* à la distance 2. $\alpha'\beta'$ est le diamètre de ce cercle. En décrivant ce cercle de *o* comme centre, on a, aux points de rencontre avec h_3, deux points de la section plane ; l'un est *m*.

Tangente en m. — La tangente est l'intersection du plan tangent et du plan sécant. Le plan tangent en *m* a pour trace sur le plan horizontal, coté 1, la polaire de *m* par rapport au contour apparent de la sphère. C'est la droite *qt* ; elle coupe la trace du plan sécant au point *t*, la droite *tm* est la projection de la tangente.

On peut également dire que qm est le double de l'intervalle réciproque ce qui détermine l'horizontale de cote 1 du plan tangent.

Éléments de l'ellipse-projection. — Centre et axes. — Coupons par le plan vertical *ov* dont la trace est parallèle à la ligne de pente du plan, et rabattons-le sur le plan horizontal du centre. Ce plan

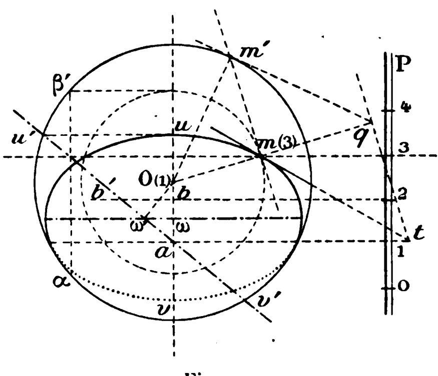


Fig. 97.

vertical donne dans la sphère un grand cercle rabattu suivant le grand cercle *o* ; il coupe le plan suivant une ligne de plus grande pente *ab* ; *b* est le point sur l'horizontale de cote 2 ; il est rabattu en b', tel que $bb' = 1$, différence des cotes ; *a*, qui est sur l'horizontale de cote 1, c'est-à-dire dans le plan horizontal du centre, reste fixe.

ab' rencontre le cercle *o* en deux points u' et v' ; $u'v'$ est un diamètre de cercle d'intersection ; il est projeté en *uv* ; $u'v'$ étant une ligne de plus grande pente du plan sécant, *uv* est le plus petit diamètre en projection ; c'est donc le petit axe de l'ellipse-projection.

On pourrait dire encore que le plan vertical *ov* est un plan de symétrie pour la sphère et pour le plan, donc aussi pour leur intersection.

Le centre *o* est le milieu de *ur* ; c'est aussi la projection de ω', pied de la perpendiculaire abaissée du centre *o* sur $u'r'$. Le grand axe est la perpendiculaire à *uv* menée par ω ; sa longueur est $u'r'$; vraie grandeur du diamètre du cercle d'intersection.

Les *points sur le contour apparent* sont situés à l'intersection du grand cercle avec l'horizontale *at* de cote 1 du plan sécant ; *a* est toujours à la rencontre de $u'v'$ avec *uv*.

PROBLÈMES SUR LES PLANS TANGENTS A LA SPHÈRE.

Plans tangents à la sphère par un point extérieur. — Cône circonscrit. — On peut mener par un point une infinité de plans tangents à la sphère.

L'ensemble de ces plans tangents enveloppe un cône ; nous allons montrer l'existence de ce cône et prouver en même temps que le lieu des points de contact est une courbe plane.

Prenons les tangentes issues d'un point S à un cercle ; les contacts A et B sont sur une droite AB perpendiculaire à SO (fig. 98).

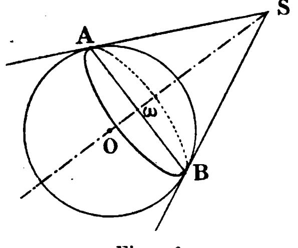


Fig. 98.

Faisons tourner la figure autour de SO. Le cercle O engendre une sphère ; A et B restent sur un cercle de cette sphère ; SA et SB engendrent un cône de révolution circonscrit à la sphère, ayant pour courbe de contact le cercle AB, et qui a pour génératrices

toutes les tangentes issues de S à la sphère. Les contacts sont bien dans un plan qui est le plan polaire du point.

Tous les plans tangents issus de S à la sphère ont aussi leurs contacts dans ce plan et, inversement, tous les plans tangents le long de cette section plane passent par le point S.

Cylindre circonscrit. — Le même raisonnement s'applique si le point S s'éloigne à l'infini dans une direction donnée B.

En effet, considérons un cercle O et menons-lui les deux tangentes parallèles à une direction D (fig. 99).

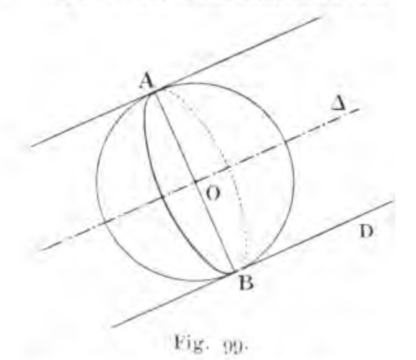


Fig. 99.

Menons par le centre O une parallèle Δ à D, et faisons tourner l'ensemble de la figure autour de Δ. Le cercle O engendre une sphère ; la droite D engendre un cylindre de révolution dont toutes les génératrices sont tangentes à la sphère.

Les points de contact A et B décrivent un grand cercle dont le plan est bien perpendiculaire à D.

Détermination du cône circonscrit. — Soit le point s (8) et une sphère de centre o (2) dont on connaît le rayon et, par suite, le contour apparent (fig. 100).

On peut mener de S à la sphère une infinité de plans tangents ; d'après ce que nous avons vu, les

contacts sont sur un cercle qui est la courbe de contact du cône de sommet S circonscrit à la sphère (plan polaire de S par rapport à la sphère).

Détermination du plan polaire. — Menons de *s* les tangentes *sa* et *sb* au cercle *o*.

Prenons, par exemple, *sa*. Cette droite, étant tangente au contour apparent, peut être considérée comme la trace d'un plan tangent vertical; ce plan tangent passe par S; c'est donc un des plans répondant à la question. Son point de contact *a* a pour cote 2, comme tous les points du grand cercle *o ;* il en est de même du point *b; ab* est donc une horizontale de cote 2 du plan polaire.

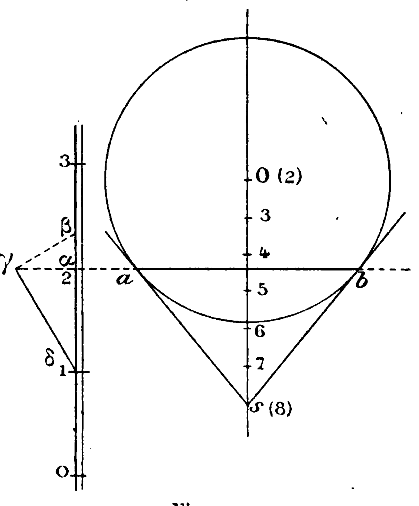


Fig. 100.

Prenons une échelle de pente, parallèle à *so*, du plan polaire; le plan polaire étant perpendiculaire à *so*, son intervalle est l'inverse de l'intervalle de la droite *so*, et son échelle de pente est graduée en sens inverse.

On peut donc graduer cette échelle à partir du point 2, les cotes allant en diminuant du côté du point *s*. Sur l'épure $\alpha\beta$ est l'intervalle de la droite *so*, $\alpha\gamma$ est l'unité du dessin et $\alpha\delta$ l'intervalle du plan.

On ramène ainsi la détermination de la courbe de contact du cône circonscrit à celle d'une section plane de la sphère.

Détermination de la courbe de contact par points. — Plans tangents à une sphère par un point S, ayan leurs contacts dans un plan donné P.

Les points de contact sont dans le plan polaire de S et dans le plan P ; ils sont donc aux points où l'intersection D de ces deux plans rencontre la sphère (fig. 101).

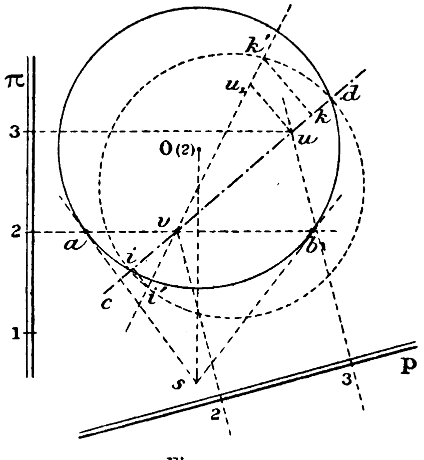


Fig. 101.

D'après ce que nous venons de voir, le plan polaire de S est déterminé par l'horizontale *ab* (2) qui permet de graduer, avec l'inverse de l'intervalle de la droite SN, une échelle de pente du plan polaire π.

L'intersection de P avec π est la droite *uv* obtenue en coupant par les plans horizontaux de cotes 2 et 3. Pour trouver les *points où cette droite rencontre la sphère*, coupons par le plan qui la projette horizontalement, et rabattons ce plan sur le plan horizontal du centre, de cote 2. L'intersection avec la sphère est rabattue suivant un cercle décrit sur *cd* comme diamètre ; *uv* est rabattue en u_1v, qui rencontre le cercle en *i'* et *k'* projetés en *i* et *k*, points dont on a les cotes *i'i* et *k'k*.

Les points projetés en *i* et *k* sont les points de contact cherchés ; le plan tangent en I, par exemple, est le plan perpendiculaire en I au rayon OI.

La tangente en *i* à la courbe de contact serait l'in-

tersection du plan tangent en I avec le plan polaire.

Détermination directe des axes de l'ellipse-projection de la courbe de contact du cône circonscrit. — Prenons pour plan vertical auxiliaire le plan *os* et rabattons-le sur le plan horizontal du centre de la sphère. L'intersection avec la sphère est rabattue suivant le grand cercle de contour apparent (fig. 102).

Le point s est projeté en s', $ss' = 6$, différence des cotes de S et O.

Le plan de la courbe de contact, étant perpendiculaire à so, est perpendiculaire au plan vertical ; sa trace est $a'b'$, corde des contacts des tangentes issues de s' au cercle o ; $a'b'$ est donc le diamètre du cercle de contact du cône et de la sphère ; $a'b'$ est la longueur du grand axe de l'ellipse-projection, puisque ce grand axe n'est autre que le diamètre horizontal du cercle qui se projette en vraie grandeur.

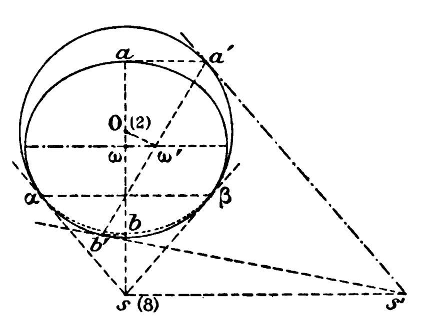


Fig. 102.

a' et b' projetés en a et b sont les points le plus haut et le plus bas ; $a'b'$ est une ligne de plus grande pente du plan de la courbe du contact ; ab est donc le diamètre du cercle qui se projette suivant la plus petite longueur, c'est-à-dire le petit axe de l'ellipse.

Le centre est au milieu ω de ab ; nous connaissons la longueur $a'b'$ du grand axe ; l'ellipse est complètement déterminée.

Points sur le contour apparent. — Menons de s les tangentes $s\alpha$ et $s\beta$.

α et β sont des points où le plan tangent, qui est vertical, passe par S; ces points appartiennent à la courbe de contact.

La tangente en α, par exemple, étant dans un plan vertical, se projette suivant la trace $s\alpha$ de ce plan vertical; l'ellipse et le cercle de contour apparent ont donc mêmes tangentes en α et β.

Remarque. — Nous avons montré que le contour apparent séparait, pour un observateur placé à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan de projection, les parties de la sphère vues des parties cachées.

Or l'ellipse rencontre le contour apparent en α et β; l'arc d'ellipse $\alpha a \beta$, qui contient le point le plus haut a est vu par l'observateur: au contraire, l'arc $\alpha b \beta$ est caché, c'est-à-dire que cet arc est sur la portion de la sphère invisible pour l'observateur. Suivant la convention en usage, nous avons tracé cet arc d'ellipse en points ronds.

Plans tangents à la sphère parallèles à une direction donnée.* — *Cylindre circonscrit. — Comme nous l'avons dit, pour ramener cette question à la précédente, il suffit de supposer que le point S, par lequel passent tous les plans tangents, s'éloigne à l'infini dans la direction donnée.

Le cône de révolution circonscrit à la sphère devient un cylindre de révolution circonscrit dont les génératrices sont parallèles à la direction donnée, et dont l'axe est la parallèle aux génératrices menée par le centre de la sphère.

La courbe de contact du cône, qui est dans le plan polaire du point S, devient un grand cercle, dont le

plan est perpendiculaire à la direction donnée. Ce plan divise en deux parties égales les cordes déterminées dans la sphère par des parallèles à la direction donnée ; c'est-à-dire que ce plan, limite du plan polaire lorsque le point S, le pôle, s'éloigne à l'infini dans une direction déterminée, est le *plan diamétral* de cette direction.

Plans tangents à la sphère parallèles à une direction donnée, ayant leurs contacts dans un plan donné. — Tous les plans tangents répondant à la première condition ont leurs contacts dans le plan diamétral de cette direction ; en prenant l'intersection de ce plan diamétral avec le plan donné, on obtient une droite, dont les points de rencontre avec la sphère sont les points de contact demandés.

Soit *o* (4) le centre de la sphère, *d* la direction donnée à laquelle nous menons une parallèle par le centre (fig. 103), droite graduée 4, 5, 6.

Soit P le plan où doivent se trouver les contacts. Menons par le centre un plan perpendiculaire à la direction *d* ; ce sera le plan diamétral de la direction *d*, qui donne la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à *d*, sur laquelle doivent se trouver les points de contact des plans tangents cherchés.

Ce plan diamétral sera déterminé par une échelle de pente parallèle à *d*, l'intervalle du plan étant réciproque de celui de *d*.

Supposons-la graduée de cette façon, à partir de l'horizontale du centre, qui a la cote 4.

L'intersection de ce plan avec P est la droite *ik*.

Pour trouver l'intersection de IK avec la sphère, il suffit de remarquer que le plan δ, qui contient IK, coupe la sphère suivant un grand cercle. Rabattons

le plan de ce grand cercle autour de l'horizontale h (4) sur le plan horizontal du centre. Le grand cercle est rabattu suivant le grand cercle de contour apparent.

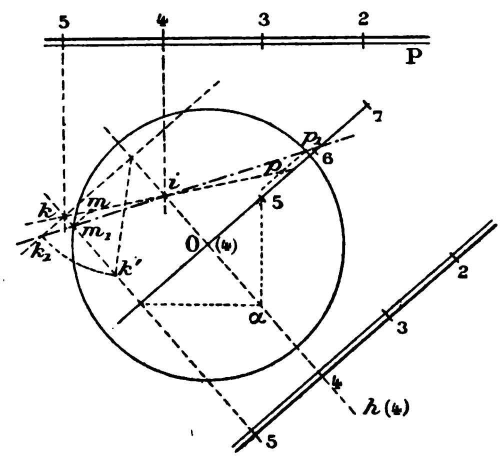


Fig. 103.

Le point i de la droite reste fixe ; le point K est rabattu en K_1, suivant la règle connue : $KK' = o\alpha$, unité de l'échelle.

iK_1 rencontre le cercle o en deux points m_1 et p_1 projetés en m et p sur ik ; ce sont les points cherchés.

Plans tangents à la sphère parallèles à un plan donné. — Le plan tangent est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact ; ayant la direction du plan tangent, on mène un rayon perpendiculaire à cette direction ; aux points de rencontre avec la sphère, on a deux points, diamétralement opposés, qui sont les points de contact cherchés. On mène par ces points des plans parallèles au plan donné : ce sont les plans demandés.

Soit une sphère de centre o tangente au plan horizontal de projection, la cote de o étant, par suite, égale au rayon, et un plan P donné par sa trace t et sa pente 1/1 par exemple.

Le rayon perpendiculaire au plan est projeté suivant ov (fig. 104).

Prenons le plan vertical ov comme plan de projection auxiliaire ; la trace de P sur ce plan est la droite $v\theta$ inclinée à 45°.

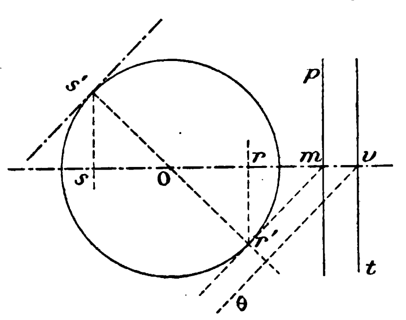


Fig. 104.

Le cercle d'intersection de la sphère et du plan vertical est projeté suivant le cercle o.

Le rayon perpendiculaire est or', qui rencontre la sphère en r' et s', projetés horizontalement en r et s.

Ce sont les points de contact, diamétralement opposés, des plans tangents parallèles à P.

Menons par r un plan parallèle à P ou, ce qui revient au même, un plan perpendiculaire au rayon ; sa trace horizontale est la droite mp. Le plan tangent est déterminé par le point r, de cote rr' et sa trace horizontale mp.

Plans tangents à la sphère passant par une droite donnée. — *Première méthode.* — Prenons un point S sur la droite Δ. Tous les plans tangents à la sphère passant par S ont leurs contacts à l'intersection de la sphère avec le plan polaire P du point S (fig. 105).

Les contacts des plans tangents menés par Δ seront sur P.

Prenons un second point σ sur Δ ; les contacts cherchés devront également être dans le plan polaire π du point σ.

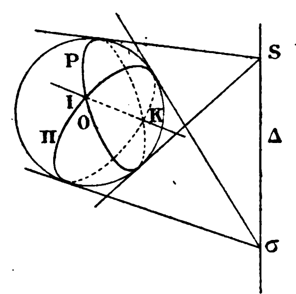


Fig. 105.

Ces points de contact seront donc les points de rencontre de la droite IK, intersection de P et de π avec la sphère [1].

Le plan tangent en I, par exemple, est alors déterminé par le point I et la droite Δ. Le point K donne une seconde solution.

Deuxième méthode. — Prenons un seul point S sur la droite.

Tous les plans tangents à la sphère passant par S ont leurs contacts sur le cercle déterminé par le plan polaire P du point S (fig. 106).

Ceux qui passent par Δ auront pour traces sur le plan P des droites passant par la trace T de Δ sur P. D'autre part, les traces des plans tangents doivent être tangentes au cercle P; ce sont donc les tangentes menées de T au cercle déterminé par le plan T. Soient TA, TB ; STA et STB sont les deux plans tangents cherchés.

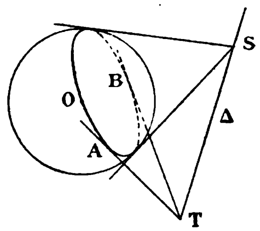


Fig. 106.

[1] La droite IK est indépendante de la position de S et de σ sur Δ. Donc cette droite est commune à tous les plans polaires des points de Δ. On l'appelle la droite conjuguée de Δ par rapport à la sphère.

Cette méthode est à employer si l'on peut choisir convenablement le point S comme dans l'épure qui suit.

Soit une sphère de centre *o* (3,5) et une droite graduée (fig. 107).

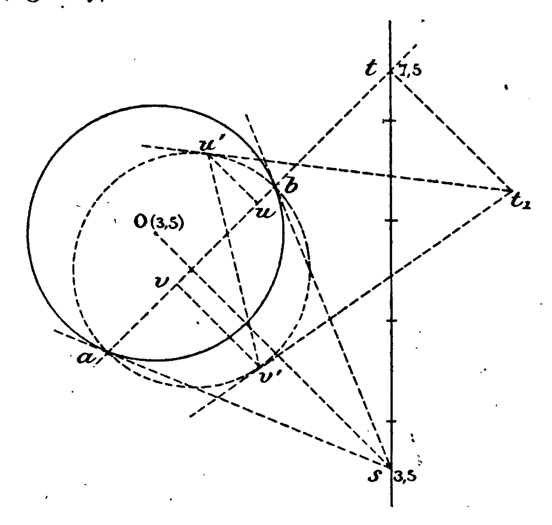


Fig. 107.

Prenons sur la droite le point *s* (3,5), situé dans le plan horizontal du centre.

Le plan polaire de *s*, étant perpendiculaire à SO, qui est une horizontale, sera un plan vertical, dont la trace est la polaire *ab* de *s* par rapport au cercle *o*.

La trace de Δ sur ce plan polaire est projetée en *t*, de cote 7,5.

Il faut mener par *t* des tangentes au cercle déterminé dans la sphère par le plan polaire.

Prenons-le comme le plan vertical auxiliaire, et rabattons-le sur le plan horizontal du centre, de cote 3,5; T est projeté en *t'* ($tt' = 7{,}5 - 3{,}5 = 4$).

Le petit cercle déterminé dans la sphère est projeté suivant le cercle décrit sur ab comme diamètre; du point t_1 on peut mener deux tangentes; prenons la tangente t_1u'; le point u, de cote uu' + 3,5 et le point t (9,5) déterminent la droite tu, qu'on peut graduer.

Le plan tangent correspondant est déterminé par tu et δ.

L'autre tangente issue de t' donnerait, avec δ, une deuxième solution.

Modification à la deuxième méthode. — Elle consiste à prendre le point à l'infini sur la droite Δ; le cône circonscrit devient un cylindre; le plan diamétral de la direction Δ, devient le plan perpendiculaire à Δ, mené par le centre de la sphère.

On peut refaire le raisonnement de la manière suivante :

Tous les plans tangents parallèles à Δ ont leurs contacts dans le plan P mené par O perpendiculaire à Δ (fig. 108).

Ceux qui passent par Δ auront pour traces des droites passant par la trace T de Δ et tangentes au cercle P.

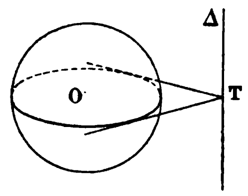


Fig. 108.

Chacune des deux tangentes menées de T au cercle P détermine, avec Δ, un plan tangent à la sphère passant par Δ.

Cette méthode est à employer lorsque la droite Δ est horizontale; dans ce cas, le plan diamétral est vertical, et l'on a facilement le point T.

Soit une sphère de centre O (3) et l'horizontale Δ (1) (fig. 109).

La courbe de contact du cylindre circonscrit dont

les génératrices sont parallèles à Δ est le plan vertical *ot* qui rencontre Δ au point *t*. Rabattons ce plan sur le plan horizontal de cote 3. Le grand cercle de la sphère est rabattu suivant le cercle *o*; *t* vient en t_1; $tt_1 = 2$; menons les 2 tangentes t_1a_1 et t_1b_1; a_1 et b_1 se relèvent en *a* et *b*.

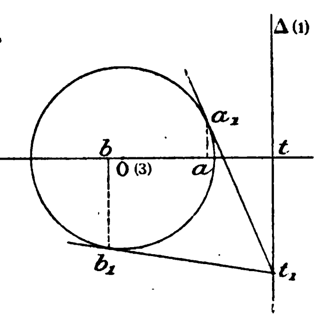


Fig. 109.

b a la cote 3 — bb_1 puisqu'il est du même côté que *t* c'est-à-dire au-dessous du contour apparent; *a* a pour cote 3 + aa_1; *a* et Δ, comme *b* et Δ, déterminent les deux plans tangents menés par la droite.

Plans tangents communs à deux sphères. — Considérons deux cercles situés dans un même plan (fig. 110). On peut leur mener quatre tangentes communes; deux extérieures, qui se rencontrent au point D, centre d'homothétie directe; deux intérieures, qui se coupent au point I, centre d'homothétie inverse. Les points D et I sont sur la ligne des centres *o*ω.

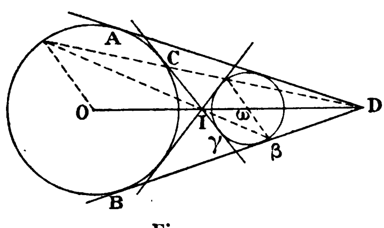


Fig. 110.

Faisons tourner la figure autour de Oω. Les cercles O et ω engendreront deux sphères. La droite DA engendrera un cône de révolution de sommet D, d'axe DωO, circonscrit aux deux sphères; la droite IγC engendrera également un cône de révolution, de sommet I, d'axe IOω, circonscrit aux deux sphères.

Tous les plans tangents issus de D et de I à l'une des sphères seront tangents à l'autre sphère ; deux sphères ont donc une infinité de plans tangents communs passant par un des deux centres d'homothétie. On peut, par conséquent, s'imposer une autre condition.

Plans tangents communs à deux sphères passant par un point donné. — On joint ~~le point~~ donné M à l'un des centres d'homothétie I ou D; en menant par MI les plans tangents à l'une des sphères, ils seront tangents à l'autre sphère; la droite MI donne donc deux solutions; il en est de même pour MD ; il y a en tout quatre solutions.

Si le point M est à l'infini dans une direction donnée, la solution est la même; on joint D et I au point donné à l'infini, c'est-à-dire que l'on mène par D et I des parallèles à la direction donnée.

Les plans tangents menés par ces droites à l'une des sphères sont les plans tangents, communs aux deux sphères, parallèles à la direction donnée.

Pour trouver les centres d'homothétie quand les sphères sont données par leurs contours apparents, on mène deux rayons parallèles OP,ωp; en les prenant dirigés dans le même sens, la droite Pp qui joint les points homologues rencontre la ligne des centres au centre d'homothétie directe D; en prenant les rayons parallèles OA et ωp_1 de sens inverse, la droite Pp_1 rencontre Oω au centre d'homothétie inverse I.

Discussion. — Si les droites MI et MD sont extérieures aux deux sphères, il y a quatre solutions (fig. 111 *a*).

MD étant extérieure, si MI coupe l'une des sphères

(fig. 111 *b*) (et par suite l'autre aux points homothétiques), on ne peut mener de plans tangents par MI; il y a deux solutions. Si MI est tangente à l'une des sphères et, par suite, à l'autre, les deux solutions

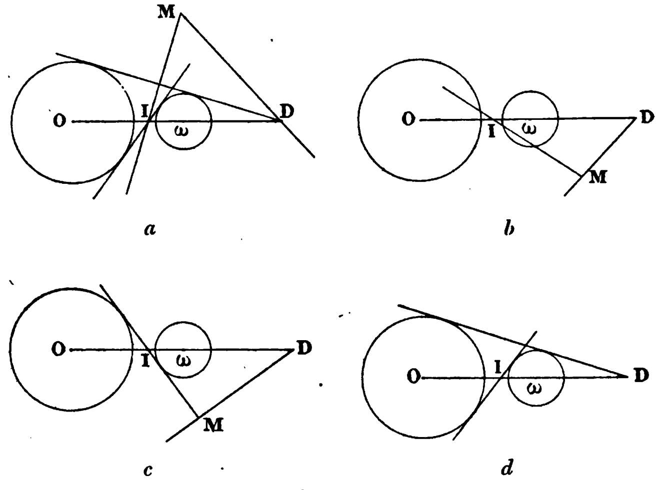


Fig. 111.

relatives à MI sont confondues (fig. 111 *c*); ce que nous venons de dire pour MI s'applique à MD.

Si MI et MD coupent les sphères, il n'y a pas de solutions.

Si MI et MD sont tangentes aux sphères (fig. 111 *d*), les solutions sont deux à deux confondues : il reste deux plans tangents communs passant par M.

En résumé, le problème, a en général, quatre solutions, deux ou zéro, deux solutions pouvant se confondre. La discussion est la même si le point s'éloigne à l'infini dans une direction donnée.

Plans tangents communs à deux sphères parallèles à une direction donnée. — Les deux sphères

sont données par leurs centres o de cote 3,5 et a (2) (fig. 112); la direction est donnée par sa projection et l'angle θ qu'elle fait avec le plan horizontal.

Prenons, par exemple, le centre d'homothétie directe d ; menons par ce point une parallèle dl_1 à la direction donnée.

Il faut mener par cette droite les plans tangents à l'une des sphères, à la sphère o, par exemple.

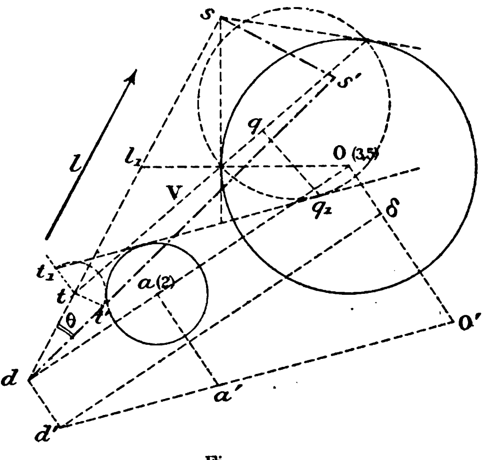


Fig. 112.

Cherchons sur la droite projetée en dl_1, dont nous connaissons l'angle avec le plan horizontal, le point de cote 3,5 égale à celle du centre o.

La cote du point projeté en d sur oa est obtenue en dd' par le rabattement du plan vertical oa sur le plan horizontal. La différence des cotes de D et de O est $\delta o'$.

Rabattons le plan vertical dl_1 sur le plan horizontal de D. La parallèle à la direction donnée menée par D est rabattue en ds', faisant l'angle θ avec dl_1.

Prenons sur ce rabattement le point s', tel que $ss' = \delta o'$, nous avons en s la projection du point qui a la même cote que o.

Le cône circonscrit de sommet s a son cercle de contact dans le plan vertical v qui rencontre dl_1 en t, de cote $tt' + dd'$.

Rabattons le plan vertical ov sur le plan horizontal du point o, et menons du rabattement t_1 du point T (tt_1 est la cote de T par rapport au plan de cote ω ; on a donc $tt_1 = tt' + dd' - oo'$) les tangentes au petit cercle rabattu autour de son diamètre.

Une de ces tangentes est t_1q_1 ; le point de contact projeté en q (de cote $qq' + oo'$) détermine, avec la droite ds, un des plans tangents cherchés.

On aurait les autres solutions de la même manière.

La discussion est la même que dans le problème précédent, les droites MI et MD étant remplacées par les parallèles à la direction donnée menées par les points I et D.

Plans tangents communs à trois sphères. — Soient S_1, S_2, S_3 les trois sphères ;

I_1 et D_1, les centres d'homothétie de S_2, et S_3 ;

I_2 et D_2, ceux de S_3 et S_1 ;

I_3 et D_3, ceux de S_1 et S_2.

On démontre, en géométrie, que les six centres d'homothétie sont sur quatre droites :

$$D_1D_2D_3,\ I_1I_2D_3,\ I_2I_3D_1,\ I_3I_1D_2.$$

Le nombre des centres inverses est toujours pair; celui des centres directs toujours impair.

D'autre part, les plans tangents communs à S_1 et S_2 doivent passer par I_3 ou D_3 ; les plans tangents com-

muns à S_2 et S_3 passent par I ou D: ceux qui sont tangents à S_1 et S_3 passent par I_2 ou D_2.

Un plan tangent commun à S_1, S_2 S_3 doit donc contenir une des quatre droites citées plus haut.

La condition est suffisante, c'est-à-dire que si l'on mène, par l'une des quatre droites, un plan tangent à S_1, par exemple; ce plan sera également tangent à S_2 et S_3.

Prenons la droite $I_1I_2D_3$; le plan tangent à S_1, mené par cette droite, passe par le point D_3, centre d'homothétie direct de S_1 et S_2; ce plan est donc tangent extérieurement à S_1 et S_2, c'est-à-dire qu'il les laisse d'un même côté; passant par I_2, le plan tangent à S_1 est tangent à S_3, S_1 et S_3 étant de côtés différents par rapport au plan tangent. Donc le plan est tangent aux trois sphères.

Il est aisé de voir, d'après le choix de la droite par laquelle on mène les plans tangents, comment les sphères sont situées par rapport à ces plans.

Comme il y a quatre droites et que, par chacune d'elles, on peut mener deux plans tangents à l'une des sphères, il peut y avoir huit solutions.

Discussion. — Les quatre droites sont $D_1D_2D_3$, $I_1I_2D_3$, $I_2I_3D_1$, $I_3I_1D_2$.

Si l'une de ces droites rencontre une des sphères, elle rencontrera forcément les autres, puisqu'elle est à elle-même son homothétique dans les trois systèmes; les points homothétiques des points de rencontre avec la première sphère devront se trouver aussi sur cette droite et sur les autres sphères.

Chaque fois qu'une des quatre droites rencontre des sphères, cela supprime deux solutions; si l'une des droites est tangente à l'une des sphères et, par

suite, aux deux autres, les deux plans tangents correspondants sont confondus.

INTERSECTION DE DEUX SPHÈRES

On sait que l'intersection de deux sphères est un cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres ; c'est le plan radical des deux sphères.

Soient les deux sphères o (4) ; o_1 (5) (fig. 113).

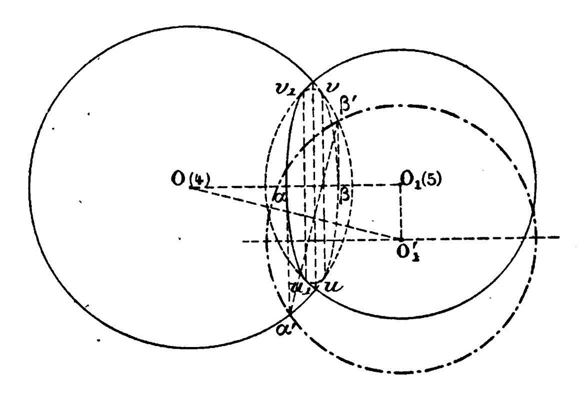


Fig. 113.

Prenons pour plan vertical auxiliaire le plan oo_1 et rabattons-le sur le plan horizontal du point O, de cote 4.

L'intersection avec la sphère de centre o est rabattue suivant le grand cercle O ; l'intersection avec la sphère o_1 est un cercle égal à o_1 décrit du rabattement o'_1 comme centre ($o_1o'_1$ est la différence, égale à l'unité des cotes de o_1 et de o).

Ce cercle rencontre le cercle o en α' et β' ; $\alpha'\beta'$ est la trace, sur le plan vertical oo_1, du plan radical des deux sphères.

Nous sommes ramenés à la détermination d'une section plane de la sphère o.

Le diamètre du cercle d'intersection est $\alpha'\beta'$.

Les projections α et β des points le plus haut α' et le plus bas β' donnent les sommets du petit axe de l'ellipse-projection; le milieu ω de $\alpha\beta$ est centre; la perpendiculaire à oo_1 menée par ω, est le grand axe, dont nous connaissons la longueur $\alpha'\beta'$. L'ellipse-projection est déterminée.

Points sur les contours apparents. — La trace sur le plan horizontal du centre o du plan de bout $\alpha'\beta'$ donne les points u et v sur le contour apparent de la sphère o; de même la trace sur le plan horizontal o'_1 donne les points u_1 et v_1 sur le contour apparent de la sphère o_1.

On sait qu'en ces points l'ellipse est tangente au contour apparent qu'elle rencontre.

Le point α étant le plus haut de la section, l'arc d'ellipse $u_1\alpha v_1$ est vu : à partir de u_1 et de v_1, les points de la section sont cachés par la sphère o_1.

Problème d'application. — ***Trouver un point qui soit à une distance* r *d'un point* o, *à une distance* ρ *d'un point* ω, *à une distance* d *d'un plan donné* P.**

Le lieu des points situés à la distance r d'un point o est la sphère de centre o et de rayon r; de même pour ω; un premier lieu du point cherché est le cercle d'intersection des deux sphères o et ω. Soit R le plan radical qui contient ce cercle.

Le lieu des points situés à une distance donnée de P est un plan mené parallèlement à P, à la distance donnée de P.

Soit Δ l'intersection de P et de R. En prenant les

points de rencontre de Δ avec l'une des sphères, on aura les points demandés.

Soient les points donnés *o* (5) et ω (6) (fig. 114).

Décrivons de ces points les contours apparents des sphères de rayons *r* et ρ. Prenons le plan vertical *o*ω comme plan de projection auxiliaire, en le rabattant

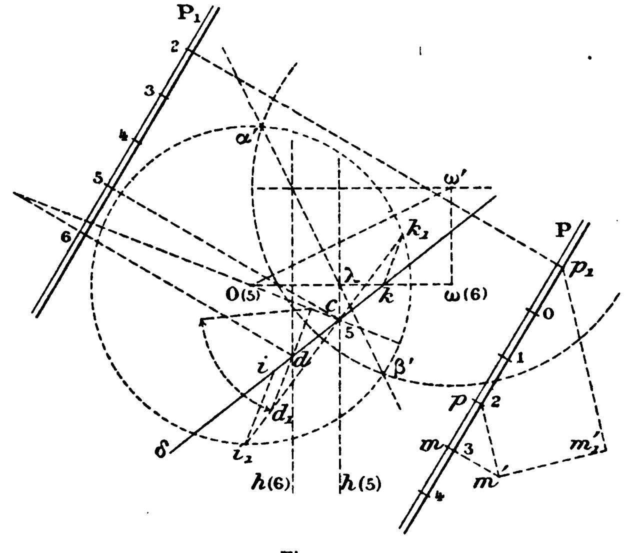


Fig. 114.

sur le plan horizontal de cote 5; ω est projeté en ω', (ωω' = 1).

L'intersection du plan vertical avec la sphère *o* est projetée suivant le cercle *o*, l'intersection avec la sphère ω est projetée suivant le cercle décrit de ω avec ρ pour rayon.

Le plan radical des deux sphères est le plan α'β' qui est perpendiculaire au plan vertical auxiliaire; sa trace sur le plan horizontal du point *o* est h_5; on a l'horizontale h_6, en coupant par le plan horizontal ω'.

Menons un plan parallèle au plan P à une distance donnée de ce plan.

Pour cela, rabattons le plan projetant la ligne de pente du plan sur le plan horizontal de cote 2. m de cote 3 vient en m'. Menons en m' une perpendiculaire à mp et prenons $m'm'_1 = d'$, en menant m'_1p_1 parallèle à mp, nous aurons en p_1 le point de cote 2 sur la ligne de pente de p_1.

Transportons cette ligne de pente parallèlement à elle-même en P_1 et graduons-la, avec l'intervalle de P, dans le même sens.

P_1 est le plan parallèle à P situé à une distance d de ce plan.

L'intersection de P_1 avec R est une droite δ obtenue suivant la méthode habituelle, dont il faut prendre l'intersection avec la sphère o, par exemple.

Pour cela, rabattons le plan mené par cette droite et le centre de la sphère sur le plan horizontal p de cote 5, qui contient ce centre. Le grand cercle déterminé dans la sphère par ce plan est rabattu suivant le cercle de contour apparent; c reste fixe, d est rabattu en d_1, suivant la règle; cd_1 rencontre le cercle o en i_1 et K_1, projetés en i et k sur δ; ces points sont les points demandés.

Points communs à trois sphères. — Soient S_1, S_2, S_3 les trois sphères.

Les points communs à S_2 et S_3 sont dans le plan radical R_1 de ces deux sphères; de même les points communs à S_1 et S_3 sont dans le plan radical R_2 de S_1 et S_3. L'intersection de R_1 et R_2 est une droite A, par laquelle passe également le plan radical R_3 de S_1 et S_2.

A, *axe radical des trois sphères*, contient leurs

points communs. Il y en a deux, qui sont les points de rencontre A avec l'une des sphères.

Soient les trois sphères S_1, S_2, S_3 de centre o_1, o_2, o_3 dont on connaît les cotes (1); (2, 5); (4) (fig, 115).

Rabattons le plan des centres sur le plan horizontal qui passe par o_1. Pour avoir l'horizontale du plan passant par o_1, prenons sur $o_2\, o_3$ le point qui a la cote du point o_1.

A cet effet, rabattons le plan vertical o_2o_3 sur le plan horizontal du point o_1. Dans ce rabattement, $o_3o'_3 = 4 - 1 = 3$; $o_2o'_2 = 2{,}5 - 4 = -1{,}5$.

Le point h est la trace sur le plan horizontal de o_1, de la droite o_2o_3; o_1h est l'horizontale cherchée.

Effectuons le rabattement autour de o_1h.

o_2 est rabattu en u_2, o_3 en u_3 sur la droite u_2h.

Traçons les trois grands cercles des sphères contenus dans le plan rabattu; o_1 est resté fixe; décrivons les deux autres de u_2 et u_3 comme centres.

Le centre radical des trois cercles est le point a_1; la perpendiculaire élevée en ce point au plan des centres est l'axe radical des trois sphères.

Les deux points communs aux trois sphères sont sur cet axe radical, placés symétriquement par rapport au plan des centres.

Cherchons la cote d'un de ces points par rapport au plan des centres, qui coïncide actuellement avec le plan horizontal du point o_1.

Pour cela, rabattons un plan radical quelconque, par exemple $\alpha_2\beta_1$, sur le plan horizontal o_1. Le petit cercle déterminé dans la sphère o, est rabattu suivant le petit cercle décrit sur $\alpha_2\beta_1$ comme diamètre; la cote de a_1, considéré comme la projection d'un point commun aux trois sphères, est a_1A_1 au-dessus ou au-dessous du plan des centres.

Ramenons la figure dans sa position primitive, le point a_1 du plan des centres se projette en a, obtenu, par homologie, à l'aide de la droite a_1u_2.

Il faut élever en ce point une perpendiculaire au plan $o_1o_2o_3$ et prendre sur cette perpendiculaire, de part et d'autre du plan, des longueurs égales à a_1A_1.

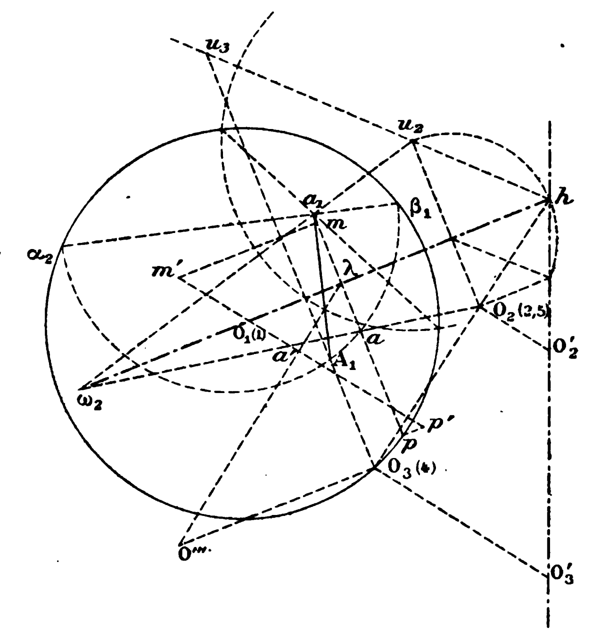


Fig. 115.

Pour faire cette construction, nous prenons comme plan vertical le plan aa_1 contenant la perpendiculaire et nous le rabattons sur le plan horizontal du point o_1. Le point o_3 se projette en o''', la trace du plan des centres est $\lambda o'''$. Le point a est projeté en a'.

Sur la perpendiculaire nous prenons $a'm' = a'p' = a_1A_1$; m' et p' sont les projections verticales des

points cherchés, leurs projections horizontales sont m et p.

Application. — *Construire un trièdre trirectangle tel que ses arêtes passent par trois points donnés* A, B, C.

Nous avons résolu ce problème directement; on peut aussi interpréter les mêmes constructions en ramenant la question à la précédente.

Supposons le plan ABC horizontal (fig. 116).

Le lieu des sommets des angles droits dont les côtés passent par B et C est une sphère S_1 décrite sur BC comme diamètre.

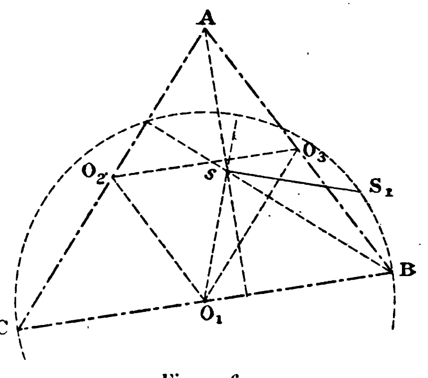


Fig. 116.

De même, les sommets des angles droits dont les côtés passent par C et A sont une sphère S_2 décrite sur CA; le sommet cherché est aussi sur la sphère S_3 décrite sur AB.

Le sommet du trièdre est donc à l'intersection des trois sphères S_1, S_2, S_3.

Le plan radical des sphères S_2 et S_3 passe par le point A; de plus, il est perpendiculaire à la ligne des centres O_3 O_2, qui est parallèle à BC.

Donc la trace du plan radical R_1 de S_2 et S_3 est la hauteur du triangle ABC issue du point A.

De même, le plan radical R_2 de S_1 et S_3 passe par B et a sa trace perpendiculaire à CA; l'intersection de

R_1 et R_2, et, par suite, de R_1, R_2, R_3 est la verticale qui se projette au point de concours des hauteurs du triangle ABC.

Pour avoir les points communs aux trois sphères, cherchons les points de la sphère S_1, par exemple, qui sont projetés en s. Coupons par le plan vertical O_1s, et rabattons ce plan sur le plan ABC. Le grand cercle de la sphère S_1 est rabattu suivant le cercle de rayon O_1 C; sS_1 est la cote cherchée.

On aura les deux points communs aux trois sphères en portant la cote au-dessus ou au-dessous du plan ABC.

Si le plan ABC n'est pas horizontal, on opère comme on l'a déjà vu. On voit que les trois sphères ne se couperont que si le triangle ABC n'a que les angles aigus.

CONES ET CYLINDRES

Définitions. — On appelle *cône* ou *surface conique* la surface engendrée par une droite assujettie à passer constamment par un point fixe et à se mouvoir suivant une loi déterminée. Le point fixe s'appelle le *sommet* du cône.

La droite variable est une *génératrice* du cône.

Si, par exemple, une droite, passant par le point S (fig. 117), est assujettie à rencontrer une courbe C, plane ou gauche (on appelle courbe gauche une courbe dont tous les points ne sont pas dans un même plan), le lieu géométrique de la droite SM est, par définition, un cône de sommet S, dont les droites SM_1, SM_2, etc., sont les génératrices ; la courbe C prend le nom de *directrice* du cône.

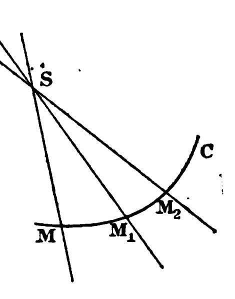


Fig. 117.

On peut encore imposer à la droite la condition de rester constamment tangente à une surface F : dans ce cas, le cône de sommet S engendré par la génératrice SM est circonscrit à la surface (fig. 118).

Le *cylindre* ou *surface cylindrique* est un cas particulier du cône, celui où le point fixe S s'éloigne

à l'infini dans une direction donnée, qui est celle des génératrices.

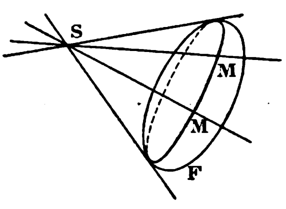


Fig. 118.

Un cylindre est donc la surface engendrée par une droite, appelée génératrice, qui se meut parallèlement à elle-même suivant une loi déterminée. De même que pour le cône, cette loi peut varier d'une infinité de manières. Si, par exemple, les génératrices rencontrent toujours une courbe donnée, tout en restant parallèles à une direction fixe, cette courbe est la directrice du cylindre engendré par la droite.

Un cône ou un cylindre sont déterminés, si l'on donne le sommet du cône ou la direction des génératrices du cylindre, en même temps que la loi du déplacement de la génératrice.

Plan tangent en un point. — Nous avons déjà rappelé la définition du plan tangent en un point d'une surface ; c'est le lieu des tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface en ce point.

Pour le cône et le cylindre, la génératrice peut être considérée comme une courbe tracée sur la surface ; elle est à elle-même sa tangente, elle fait donc partie du plan tangent. La détermination de ce plan tangent repose sur le théorème suivant :

Théorème. — *Le plan tangent à un cône ou à un cylindre est le même tout le long de la génératrice.*

Soit un cône déterminé par son sommet S et sa directrice C (fig. 119).

Prenons une génératrice SV et un point M quel-

conque sur cette génératrice. Nous allons montrer que le plan tangent en M est le même que le plan tangent en V. Comme le point M est quelconque, le théorème sera démontré.

Traçons sur la surface du cône une courbe quelconque D passant par le point M.

Considérons une deuxième génératrice SV′ qui rencontre en M′ la courbe tracée.

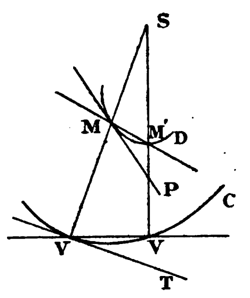


Fig. 119.

Menons les sécantes VV′ et MM′. Supposons que la génératrice SV′ se rapproche indéfiniment de SV; pendant ce mouvement, les droites SV, MM′, VV′ restent toujours dans un même plan ; il en sera de même à la limite (si cette limite existe, ce qui est l'hypothèse); or, à la limite, la sécante VV′ devient la tangente VT en V à la courbe C; en même temps, la sécante MM′ devient la tangente MP en M à la courbe D.

Les trois droites SV, MP, VT sont donc dans un même plan ; ce plan est, par définition, le plan tangent en V, puisqu'il contient la génératrice SV et une tangente VT à une courbe tracée sur la surface ; c'est également le plan tangent en M, puisqu'il contient SM et la tangente MP. Donc les plans tangents en M et en V sont les mêmes, et le plan tangent est le même tout le long de SV.

Si l'on cherche le plan tangent en M, il est donc inutile de tracer une courbe en M ; le plan tangent en ce point est déterminé par SM et la tangente au point où cette génératrice rencontre la directrice.

Cas du cylindre. — Soit un cylindre déterminé par sa directrice C et la direction des génératrices (fig. 120).

Le plan tangent en un point quelconque M de la génératrice G est le même que le plan tangent en V.

La démonstration est la même que pour le cône.

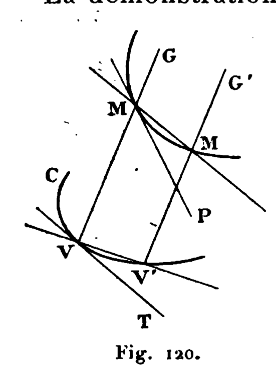


Fig. 120.

Les sécantes MM′ et VV′ restent dans un même plan avec G, quand G′ se rapproche indéfiniment de G.

A la limite, le plan déterminé par G et la tangente VT est donc confondu avec le plan déterminé par G et la tangente MP ; c'est-à-dire que les plans tangents au point V et en un point M quelconque sont confondus, ce qu'on exprime encore en disant que le plan tangent est le même tout le long de la génératrice.

Pour avoir le plan tangent en M à un cylindre dont on connaît la directrice, on mène la génératrice MV ; le plan tangent en M est déterminé par MU et la tangente VT.

Remarque. — Cette démonstration est exactement celle que nous avons donnée, sous une autre forme, pour établir qu'en général la projection conique ou cylindrique de la tangente à une courbe est la tangente à la projection de cette courbe.

Étant donnée une des projections d'un point d'une surface conique ou cylindrique, déterminer l'autre et le plan tangent en ce point. — On donne

une courbe C dans un plan P ; c'est la directrice d'un cylindre ; la direction des génératrices est déterminée par la projection graduée d'une droite g (fig. 121).

On demande les points de la surface du cylindre qui sont projetés en m.

Menons par m une parallèle à g ; elle rencontre la projection de la directrice en u et v ; la génératrice est donc mu ou mv.

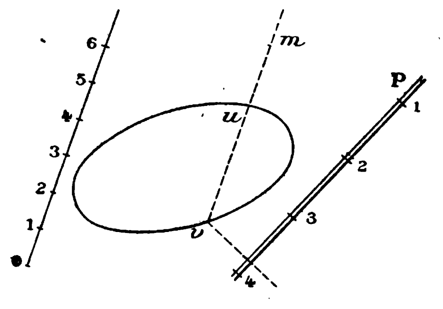


Fig. 121.

Prenons mv comme projection de la génératrice qui passe par le point cherché.

Le point v, étant dans le plan P, a pour cote 3,8.

Nous connaissons l'intervalle des génératrices, qui est celui de g ; on peut donc trouver la cote du point projeté en m ; en appelant a le nombre qui mesure vm sur l'échelle du dessin, et x la cote de m, on a :

$$\frac{x - 3{,}8}{a} = \frac{1}{i}.$$

i est l'intervalle de la droite g.

On obtiendrait une autre cote en prenant la génératrice mu.

Dans ce cas, il y a deux points du cylindre projetés en m ; ce sont les points d'intersection du cylindre avec la verticale.

On opérerait de même dans le cas du cône en considérant la génératrice projetée suivant sm.

INTERSECTION D'UNE DROITE AVEC UN CÔNE OU UN CYLINDRE

Intersection d'une droite et d'un cône. — Soient un cône donné par son sommet S (fig. 122), une directrice plane C, et la droite D dont on demande l'intersection avec le cône.

Coupons par un plan passant par la droite D ; il donne sur le cône une courbe dont il faut prendre l'intersection avec la droite D.

Pour ne pas construire cette courbe, projetons-la coniquement, ainsi que D, sur le plan de la directrice en prenant le point S comme centre de projection.

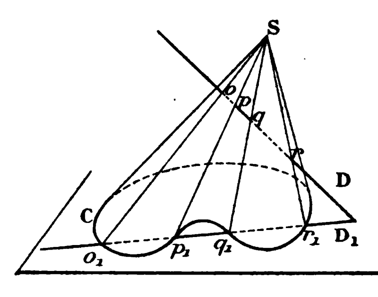


Fig. 122.

La courbe est projetée suivant C, la droite D suivant D_1, qui rencontre la directrice en o_1, p_1, q_1, r_1 ; ces points sont les projections coniques des points o, p, q, r, à l'intersection de D avec So_1, Sp_1, Sq_1, Sr_1 ; o, p, q, r, sont les points demandés.

Pratiquement, cela revient à faire passer par le point S et la droite D un plan ; soit D_1 la trace de ce plan sur le plan de la directrice, on prend les génératrices qui passent par les points d'intersection de D_1 avec la directrice ; les points où ces génératrices rencontrent la droite D sont les points demandés.

Intersection d'une droite et d'un cylindre. — *Directrice plane.* — Elle s'obtient de la même ma-

nière, en projetant la droite sur le plan de la directrice parallèlement aux génératrices, c'est-à-dire en faisant passer par la droite un plan parallèle aux génératrices ; on prend la trace sur le plan de la directrice et, par les points d'intersection, on mène les génératrices qui rencontrent la droite aux points cherchés.

Application au cône. — Soit un cône ayant son sommet s (o) dans le plan de comparaison ; la directrice est une courbe C située dans le plan vertical V et donnée par son rabattement C_1 sur le plan horizontal (fig. 123) (la courbe est supposée située dans l'espace au-dessus du plan horizontal) ; une droite est donnée par sa projection d, la cote d'un point a (3) et sa trace t (o).

Nous allons projeter coniquement, du point S comme centre de projection, la droite D sur le plan V.

Pour cela, nous allons projeter deux points de la droite convenablement choisis, puis nous les rabattrons avec le plan V sur le plan horizontal.

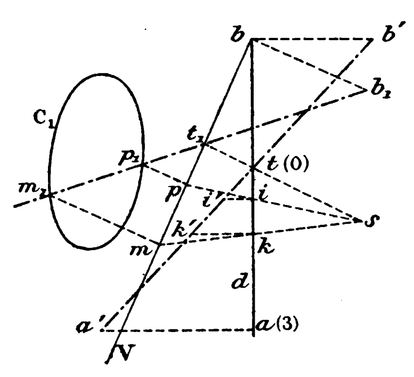


Fig. 123.

Le point t est projeté en t_1 qui reste fixe pendant le rabattement, puisque Δt est tout entière dans le plan de comparaison.

Le point b où la droite D rencontre le plan V a sa projection conique en b lui-même ; ce point est rabattu

à une distance égale à sa cote bb', que nous déterminons en rabattant le plan projetant la droite sur le plan de comparaison.

Cette cote est bb' au-dessous du plan horizontal; B est donc rabattu avec le plan V en b_1 du côté opposé à C_1,

b_1t_1 rencontre C_1 en m_1 et p_1 projetés en m et p sur V.

Ces points sont les projections coniques des points i et k à l'intersection de d avec les projetantes sp et sm; i et K sont les points demandés. Leurs cotes sont ii' et kk' au-dessus du plan horizontal.

DÉTERMINATION DES PLANS TANGENTS

Plans tangents à un cône par un point extérieur à la surface. — *Directrice plane.* — Le plan tangent à un cône en un point contient la génératrice passant par ce point ; donc tout plan tangent à un cône passe par le sommet.

Par suite, les plans tangents issus du point P contiendront la droite SP.

Soit T la trace de cette droite sur le plan de la directrice (fig. 124).

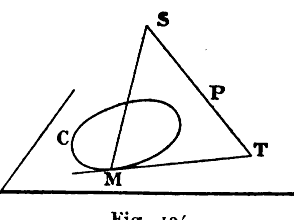


Fig. 124.

La trace d'un plan tangent sur le plan de la directrice est une tangente à cette courbe et doit passer par T; c'est donc une tangente menée de T à la courbe C, soit TM; le plan déterminé par SP et la tangente TM est tangent au cône tout le long de la génératrice SM.

Il y a autant de solutions qu'on peut mener de tan-

gentes du point T à la courbe C. Le problème est impossible, si l'on ne peut pas mener de tangentes du point T ; il en est ainsi, par exemple, si, la directrice étant un cercle, T est à l'intérieur du cercle.

Plan tangent à un cône parallèle à une direction donnée. — Se donner une direction, c'est se donner un point à l'infini bien déterminé.

La solution est donc la même que pour la question précédente.

On joint le sommet du cône au point donné à l'infini, c'est-à-dire qu'on mène par le sommet du cône une parallèle à la direction donnée ; cette droite est la droite SM de l'épure précédente.

On prend la trace de cette droite sur le plan de la directrice et, par le point ainsi obtenu, on mène des tangentes à la directrice.

Ces tangentes, avec la parallèle à la direction donnée menée par le sommet du cône, déterminent les plans tangents.

Il n'y a donc rien à changer à la solution précédente ; au lieu de joindre S à un point M, on mène SM parallèle à la direction donnée.

Epure. — Soit un cône de sommet s (6) dont la directrice, située dans le plan P, est donnée par son rabattement sur le plan de comparaison (fig. 124) ; proposons-nous de déterminer les plans tangents parallèles à la direction d, graduée. Menons par s la parallèle δ à d, graduée à partir de s avec le même intervalle. Soit t l'intersection de δ avec P, déterminée suivant la méthode habituelle ; le point t est rabattu en t_1, en supposant, pour fixer le sens du rabattement, que la directrice est, dans l'espace, au-

dessus du plan horizontal ; menons de t_1 les tangentes du rabattement de la directrice ; soit t_1a_1 une de ces tangentes ; elle est relevée suivant tk, k étant le

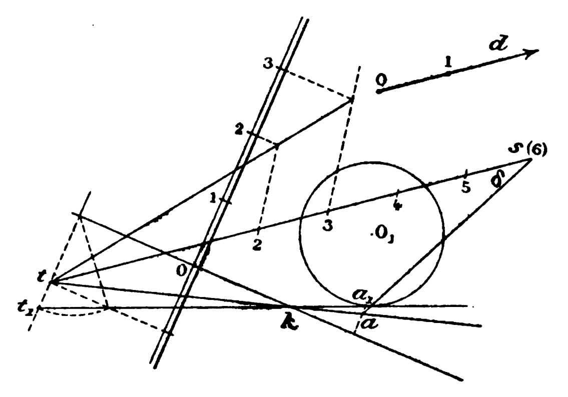


Fig. 125.

point fixe où t_1a_1 rencontre l'axe du rabattement. Le point s (6) et tk déterminent l'un des plans tangents. Dans le cas de la figure, la directrice étant un cercle, il y aurait deux solutions. La génératrice de contact est sa, a_1 se relevant en a sur tk et sur la perpendiculaire à l'axe du rabattement.

Plan tangent à un cylindre par un point extérieur. — La méthode à employer est la même que pour le cône, en considérant le cylindre comme un cône ayant pour sommet le point à l'infini dans la direction des génératrices ; on peut l'établir directement.

Tout plan tangent à un cylindre contient une génératrice ; donc le plan cherché doit être parallèle aux génératrices ; par suite, il contient la parallèle MT aux génératrices menée par le point M.

La trace du plan tangent cherché sur le plan de la

directrice doit être tangente à la directrice ; ce sera une des tangentes menées de la trace T de la droite MT à la directrice (fig. 126).

Un de ces plans tangents est déterminé par la tangente TU et la droite MT.

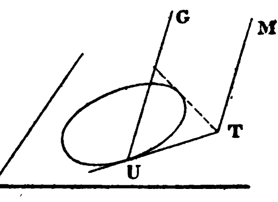


Fig. 126.

La génératrice de contact du plan tangent est celle qui passe par le point U.

Epure. — Soit un cylindre déterminé par sa directrice *c*, située dans le plan P, une génératrice *g* graduée (fig. 127).

On demande les *plans tangents passant par un point m* (*o*).

Menons par le point M une parallèle *mp* à *g*, et cherchons son intersection avec le plan P, en rabattant sur le plan horizontal le plan vertical *mp*. L'intersection avec P est rabattue en bb_1 la parallèle aux génératrices en ma_1. Nous obtenons le point t_1, projeté en *t*.

Fig. 127.

Les projections des tangentes sont les tangentes à la projection ; prenons la tangente *tr*; cette droite est déterminée par la cote tt_1 de *t* et la cote du point *r* situé dans le plan P; elle donne avec le point *m* un des plans tangents demandés. La génératrice de contact est $r\gamma$.

La deuxième tangente donne une autre solution.

Plans tangents à un cylindre parallèle à une direction donnée. — Un plan tangent répondant à la question doit être parallèle aux génératrices et parallèle à la direction donnée ; il est donc parallèle à un plan contenant des parallèles à ces deux droites.

Sa trace sur le plan de la directrice devra être tangente à cette courbe ; ayant la direction de cette trace, on mène à la directrice les tangentes parallèles. Chacune de ces droites détermine, avec la génératrice qui passe par le point de contact, un des plans tangents demandés.

Pour montrer que cette solution est toujours la même que les précédentes, au point de vue théorique, on peut l'expliquer de la manière suivante :

Le plan tangent cherché doit contenir le point à l'infini sur les génératrices et le point à l'infini dans la direction donnée. La droite à l'infini de ce plan, c'est-à-dire la direction du plan tangent, est déterminée ; ce plan est parallèle aux génératrices et à la direction donnée. Le reste de la solution s'explique de la même façon. *On est conduit à la règle suivante :*

On mène par un point de l'espace une parallèle aux génératrices et une parallèle à la direction donnée ; on prend la trace du plan ainsi déterminé sur le plan de la directrice ; on mène à la directrice des tangentes parallèles à cette trace ; chacune de ces tangentes donne une solution, en lui adjoignant la génératrice de contact correspondante.

Problèmes impossibles. — Il est facile de se rendre compte de l'impossibilité des problèmes suivants :

Plan tangent à un cône ou à un cylindre par une droite, si la droite ne passe pas par le sommet du

cône ou n'est pas parallèle aux génératrices du cylindre.

Plan tangent parallèle à un plan, si le plan parallèle mené par le sommet du cône n'est pas tangent, ou si le plan n'est pas parallèle aux génératrices du cylindre.

Plan tangent commun à deux cônes qui n'ont pas même sommet, parce que ce plan tangent doit contenir la droite des sommets et avoir pour trace sur le plan des directrices une tangente commune aux deux directrices passant par la trace de la droite des sommets, condition qui n'est réalisée que dans des cas particuliers, par exemple, si les deux cônes sont homothétiques, ou encore si les deux cônes ont une directrice plane commune.

De même, *plan tangent commun à deux cylindres.*

Soient, par exemple, deux cônes homothétiques (fig. 128) ; les traces des deux cônes sur un même

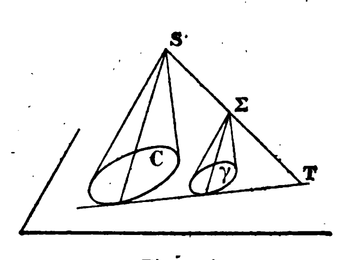


Fig. 128.

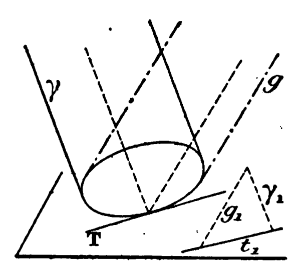


Fig. 129.

plan sont homothétiques, le centre d'homothétie étant la trace de la droite des sommets. Les tangentes communes aux directrices menées de T déterminent, avec la droite des sommets, des plans tangents communs aux deux cônes.

Prenons deux cylindres ayant une directrice plane commune (fig. 129). Menons par un point de l'espace

des parallèles aux génératrices des deux cylindres ; la trace du plan de ces parallèles est t_1 ; en menant T, parallèle à t_1, tangente à la directrice, T détermine avec les génératrices de contact un plan tangent commun aux deux cylindres.

Contours apparents des cônes et des cylindres. — Les contours apparents des cônes ou des cylindres sur un plan sont les traces sur ce plan des plans tangents parallèles à une perpendiculaire au plan.

Soit, par exemple, un cône de sommet S, ayant, pour fixer les idées, sa directrice dans le plan horizontal.

Menons au cône les plans tangents parallèles à une verticale ; les génératrices de contact sont S*m* et S*p* (fig. 130).

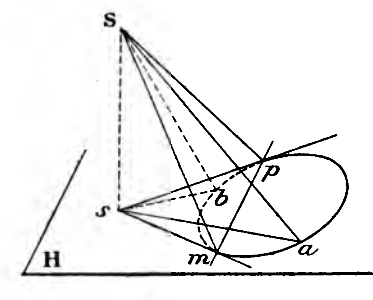


Fig. 130.

Pour un observateur placé à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan, toute la partie du cône située au-dessous du plan *m*S*p* sera cachée ; au contraire, la partie située au-dessus sera vue. Les droites *sm* et *sp*, projections de S*m* et S*p*, forment le contour apparent horizontal du cône.

Par exemple, une génératrice S*a*, telle que le point *a* soit du même côté que l'observateur par rapport au plan *m*S*p*, sera vue ; au contraire S*b*, située de l'autre côté, sera cachée à l'observateur.

Il en sera de même pour une courbe tracée sur la surface du cône.

Prenons la directrice, par exemple ; l'arc *map* sera

vu ; l'arc *mbp* sera caché pour l'observateur placé suivant la convention indiquée : sur le dessin cet arc *mbp* sera figuré en points ronds.

Pour un cylindre, le contour apparent horizontal, par exemple, se compose des projections des deux génératrices de contact des plans tangents menés au cylindre parallèlement à une verticale.

En résumé, la détermination des contours apparents revient à celle des plans tangents parallèles à une direction donnée, qui est verticale.

THÉORÈME. — *Quand une courbe tracée sur une surface rencontre le contour apparent de la surface sur un plan, la projection de la courbe sur le plan est tangente au contour apparent.*

Nous venons de montrer qu'en tous les points du contour apparent sur un plan le plan tangent est perpendiculaire à ce plan. Par exemple, en un point du contour apparent horizontal, le plan tangent est vertical.

Tout ce qui est dans un plan vertical se projette sur sa trace horizontale ; la tangente à la courbe au point de rencontre avec le contour apparent est dans ce plan vertical ; d'autre part, la tangente à la projection est la projection de la tangente ; donc la tangente à la projection de la courbe au point considéré est la trace du plan tangent vertical, c'est-à-dire, la projection de la génératrice de contour apparent qui passe par ce point.

DÉTERMINATION DU CONTOUR APPARENT

Directrice donnée par sa projection. — Il suffit, d'après ce qui précède, de mener du sommet du cône,

ou parallèlement aux génératrices du cylindre, les tangentes à la directrice.

Si le sommet du cône se projette à l'intérieur de la directrice, le cône n'a pas de contour apparent ; s'il se projette sur la directrice, le cône a une génératrice verticale, et toutes les courbes rencontrant cette génératrice, passent en projection par le sommet.

Directrice donnée par son rabattement. — *Cas du cône.* — Soit P l'échelle de pente d'un plan, dans lequel on donne un cercle par son centre *o* et son rayon ; *s* (6) le sommet du cône dont on demande le contour apparent (fig. 131).

Rabattons le plan P autour de l'horizontale de *o* sur le plan horizontal de même cote ; le point *o* reste fixe et nous pouvons tracer le rabattement du cercle connaissant son rayon.

Fig. 131.

Pour mener au cône les plans tangents parallèles à une verticale, menons par S une verticale ; sa trace sur P est le point *t* du plan projeté en *s* ; ce point est rabattu en t_1 ; menons de t_1 les tangentes au cercle $t_1 i$, $t_1 k$; en relevant ces tangentes suivant *si* et *sk*, on a les traces des plans verticaux cherchés, puisqu'une droite d'un plan vertical suffit à le déterminer. L'ellipse projection du cercle serait tangente au contour apparent en *a* et *b*, relèvements de a_1 et b_1.

Cas du cylindre. — Soit un cylindre ayant pour directrice dans un plan P une hyperbole donnée par son rabattement H_1 sur le plan de comparaison (fig. 132); G la direction graduée des génératrices. Pour mener au cylindre les plans tangents verticaux, remarquons que le plan parallèle aux génératrices et à une verticale n'est autre que le plan projetant horizontalement G; ce plan coupe P suivant la droite en v (o) u (1) dont la projection coïncide avec celle de b, uv est rabattue en u_1v; menons à la directrice rabattue les tangentes parallèles b_1i et a_1k; elles se relèvent en ak, bi, qui sont les traces des plans verticaux formant le contour apparent. La projection de l'hyperbole serait tangente au contour apparent en a et b.

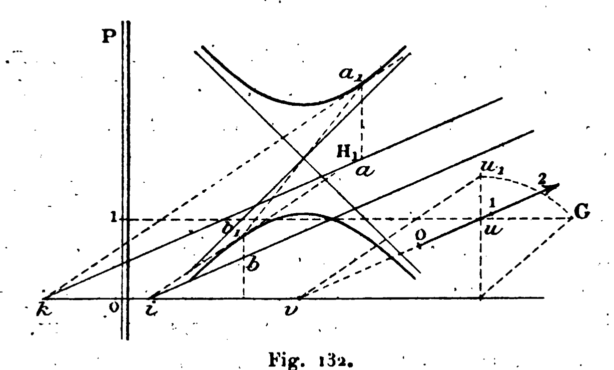


Fig. 132.

Remarque. — Pour qu'on puisse mener des tangentes à H_1, il faut que la direction u_1v, comme dans le cas de la figure, soit dans l'angle des asymptotes, qui ne comprend pas la courbe, sinon il n'y a pas de contour apparent.

Si la directrice est une parabole, il n'existe qu'une tangente à distance finie, il n'y a donc qu'une géné-

ratrice de contour apparent. Si la directrice est une section droite, donnée dans le plan horizontal, c'est-à-dire si les génératrices du cylindre sont verticales, tous les plans tangents sont verticaux ; il n'y a pas à déterminer de contour apparent.

OMBRES

Ombres propres des cônes et des cylindres. — Ombres portées sur un plan. — Étant donné un cône, proposons-nous de trouver sur la surface la ligne qui sépare la partie éclairée de la partie dans l'ombre, en supposant d'abord le cône éclairé par des rayons parallèles (ombre au soleil).

Ce problème n'est autre que celui de la détermination du contour apparent, pour un observateur placé à l'infini dans la direction des rayons lumineux.

Les génératrices de contact des plans tangents menés aux cônes parallèlement aux rayons lumineux sépareront donc sur le cône la partie éclairée de celle qui est dans l'ombre.

On est ramené à trouver les génératrices de contact des plans tangents parallèles à une direction donnée.

L'ombre portée sur un plan sera limitée aux traces, sur ce plan, des plans tangents ainsi déterminés.

Exemple. — Soit un cône ayant sa directrice C dans le plan horizontal, et pour sommet le point s (2,5) (fig. 127).

Soit l la direction des rayons lumineux en projection ; ces rayons font un angle donné avec le plan horizontal.

Menons par le sommet du cône une parallèle aux

rayons lumineux; la trace de cette droite est t, l'angle sts' étant l'angle donné et $ss' = 2{,}5$; les tangentes tp et tm sont les traces des plans tangents au cône parallèles aux rayons lumineux; sm et sp sont les projections des génératrices qui séparent la partie éclairée de la partie sombre ; pour l'observateur, il

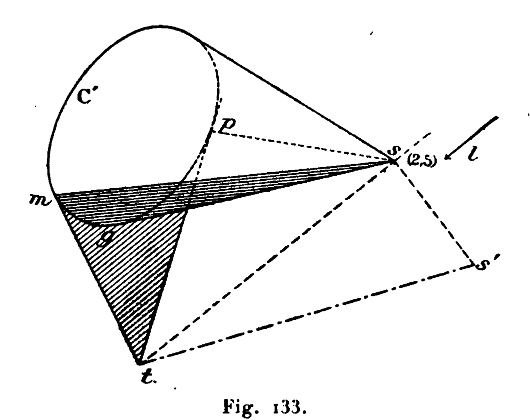


Fig. 133.

n'y aura que la portion comprise entre sm et la génératrice de contour apparent horizontal sg qui sera sombre ; le reste de la surface qui est dans l'ombre n'est pas vue de l'observateur ; on dit que c'est de l'ombre *virtuelle*.

Les traces tm et tp des plans tangents limitent l'ombre portée ; l'observateur ne voit que la portion située en dehors de la projection du cône ; c'est la portion qui est marquée sur le dessin par des hachures.

Ombres du cylindre. — Le cylindre est donné par sa directrice, le cercle c, situé dans le plan de comparaison, et par la direction g de ses génératrices (fig. 134). Nous avons limité le cylindre à un plan

horizontal (3) qui donne un cercle égal à c, projeté suivant le cercle γ tangent au contour apparent.

Soit l la direction des rayons lumineux ; menons par m (1) des parallèles mt et $m\theta$ à g et l ; la droite $t\theta$, trace de ce plan sur le plan de comparaison, donne la direction des traces des plans tangents parallèles à l ; menons les tangentes ai et bk parallèles à $t\theta$;

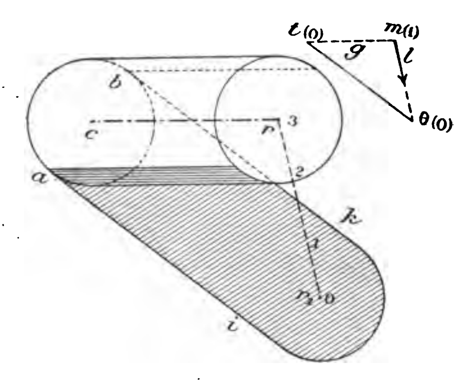


Fig. 134.

nous obtenons les génératrices de a et b qui séparent la portion éclairée de celle qui est dans l'ombre. La génératrice de a est seule utile, l'autre étant cachée. ai et bk limitent l'ombre portée sur le plan horizontal ; cette ombre s'arrête à celle du cercle γ obtenue en menant $\gamma\gamma$, parallèle à l, et prenant le point γ, de cote o ; le rayon de γ_1 est d'ailleurs égal à celui de γ ; la portion de l'ombre vue du spectateur est marquée sur le dessin par des hachures.

NORMALES COMMUNES

Plans tangents parallèles à un cône et à un cylindre, à deux cylindres, à deux cônes. — Nor-

males communes. — On appelle *normale* à une surface en un point la perpendiculaire au plan tangent à la surface en ce point.

Une normale commune à deux surfaces est une droite normale à chacune des deux surfaces en l'un de ces points de rencontre avec ces surfaces. En ces points, les plans tangents aux deux surfaces sont parallèles. Dans le cas qui nous occupe, le problème revient à mener aux deux surfaces coniques ou cylindriques des plans tangents parallèles. Supposons ce problème résolu, et soient G_1 et G_2 deux génératrices de contact, une sur chaque surface.

La normale commune est perpendiculaire aux plans tangents parallèles ; on connaît donc sa direction ; elle doit s'appuyer sur les génératrices G_1 et G_2; il suffit, pour l'avoir, de mener une droite parallèle à une direction connue, s'appuyant sur deux droites données.

Il y aura autant de solutions que de couples de génératrices de contact de plans tangents parallèles.

Normales communes à deux cylindres. — Dans ce cas, les plans tangents cherchés doivent être parallèles aux génératrices des deux cylindres ; on mène à chaque cylindre les plans tangents parallèles aux génératrices de l'autre.

Supposons qu'il y en ait deux : soient g_1 et g_2 leurs génératrices de contact sur le cylindre C ; γ_1 et γ_2 les génératrices de contact sur le cylindre γ. On pourra mener une droite parallèle à la direction perpendiculaire aux plans tangents parallèles s'appuyant :

Sur g_1 et γ_1, g_2 et γ_1
Sur g_1 et γ_2, g_2 et γ_2.

Il y a donc quatre normales communes à deux cylindres dans le cas où l'on peut mener à chacun deux plans tangents parallèles à la direction des génératrices de l'autre.

Normales communes à un cône et à un cylindre. — On mène au cône les plans tangents parallèles aux génératrices du cylindre ; soient T_1 et T_2 ces plans tangents, que nous supposons au nombre de deux ; g_1 et g_2 les génératrices de contact.

Menons au cylindre des plans tangents parallèles à ces plans ; le problème est possible, puisque ces plans sont déjà parallèles aux génératrices du cylindre.

Supposons qu'il y en ait deux parallèles à T_1 ; soient γ_1 et γ_2 les génératrices de contact et deux parallèles à T_2 ; soient γ_3 et γ_4 les génératrices de contact.

La normale commune a pour direction celle de la perpendiculaire à T_1, soit n_1 cette direction ; ou à T_2, soit n_2 une perpendiculaire à T_2.

On pourra mener une droite parallèle à n_1 s'appuyant sur g_1 et γ_1 ou sur g_1 et γ_2, ou bien une parallèle à n_2 s'appuyant sur g_2 et γ_3 ou sur g_2 et γ_4.

Il y a donc quatre solutions dans le cas examiné, qui est celui des cônes et cylindres du second degré, ayant pour directrice une conique.

Normales communes à deux cônes. — Dans ce cas, le problème n'a pas toujours de solution qu'on puisse construire avec la règle et le compas. Supposons qu'il existe sur les deux cônes S et σ des plans tangents parallèles. Transportons le cône σ parallèlement à lui-même, de manière à ce qu'il ait le point *s* pour sommet. Les plans tangents parallèles dans la

première position deviennent des plans tangents communs aux cônes de même sommet.

Supposons connues les traces des deux cônes sur un même plan dans leur nouvelle position ; les traces des plans tangents communs seront les tangentes communes aux deux bases, qu'on ne peut que tracer graphiquement dans le cas général.

Soit une de ces tangentes qui détermine avec le sommet un plan tangent commun.

On mène par le point σ, dans sa première position (fig. 135), un plan parallèle à ce plan tangent commun.

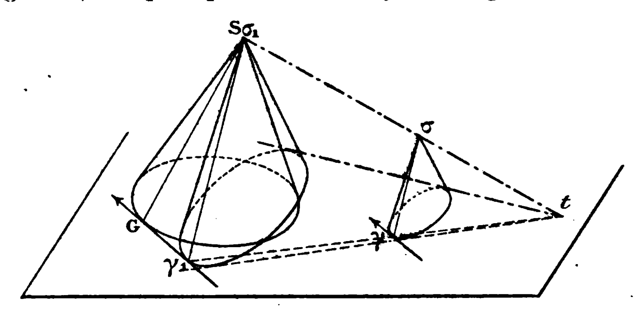


Fig. 135.

Soit γ la génératrice de contact ; G, la génératrice de contact du plan tangent parallèle sur le cône S ; on obtient une normale commune en menant une perpendiculaire au plan tangent s'appuyant sur G et γ.

Il y a autant de solutions qu'on peut mener de tangentes communes aux traces des deux cônes lorsque les sommets ont été amenés à coïncider.

Nous allons prendre le cas où la trace de chacun des deux cônes sur un même plan est un cercle.

Prenons ce plan pour plan de comparaison.

Soit *s* (4) le sommet d'un cône ayant pour direc-

trice le cercle C situé dans le plan de comparaison, σ (2) le sommet d'un second cône ayant pour base le cercle γ situé également dans le plan de comparaison (fig. 136).

Transportons le cône de sommet σ parallèlement à lui-même, de manière à ce qu'il ait pour sommet s.

Dans sa nouvelle position, le cône transporté sera coupé par le plan de comparaison suivant un cercle homothétique du cercle γ, le centre d'homothétie

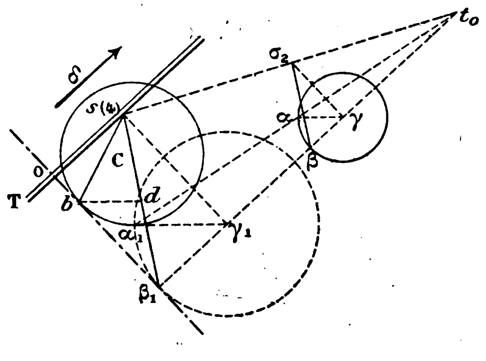


Fig. 136.

étant le point t, trace de la droite des sommets. Son centre sera sur la parallèle $s\gamma_1$ à $\sigma\gamma$. γ_1 est donc le centre de la nouvelle base du cône transporté. Pour avoir son rayon, prenons le rayon $\gamma_1\alpha_1$, homothétique de $\gamma\alpha$.

Les deux cônes ont maintenant même sommet ; on peut leur mener des plans tangents communs qui auront pour traces les tangentes communes à C et à γ_1. Prenons une de ces tangentes $b\beta_1$. Le plan tangent ainsi déterminé est tangent au cône s suivant la génératrice SB.

Soit β l'homothétique de β_1 ; $\sigma\beta$, parallèle à $s\beta$, est

la génératrice de contact d'un plan tangent au cône σ parallèle au plan tangent déjà mené au cône s.

La direction d'une normale commune est δ, perpendiculaire à $b\beta_1$, et graduée avec l'intervalle réciproque du plan tangent T.

Il suffit de mener une droite parallèle à δ s'appuyant sur $\sigma\beta$ et sur sb. Cette droite est normale aux deux cônes aux points où elle rencontre les génératrices de contact.

CONES ET CYLINDRES
DE RÉVOLUTION

Nous allons étudier les particularités relatives aux cônes et cylindres de révolution et montrer les simplifications qu'apporte aux méthodes précédentes la propriété de ces surfaces d'être de révolution.

On appelle *cône de révolution* la surface engendrée par une droite tournant autour d'une droite fixe qu'elle rencontre.

Tous les points de la droite, en tournant autour de l'axe, engendrent des cercles, appelés *parallèles*, situés dans les plans perpendiculaires à l'axe.

Tout plan passant par l'axe du cône coupe ce cône suivant deux génératrices symétriques, faisant avec l'axe le demi-angle au sommet du cône.

Prenons comme plan du tableau le plan de l'axe SΔ et de la génératrice SM.

Un point M engendre un parallèle dont le centre est en o sur l'axe.

Considérons une sphère contenant le parallèle et tangente au plan tangent au cône suivant SM. Le centre de cette sphère sera en ω sur SΔ, puisqu'elle contient le cercle O (fig. 137).

Pendant la rotation de SM autour de SΔ, la sphère reste fixe ; le plan tangent au cône suivant SG reste perpendiculaire au rayon ωM et, par suite, reste tangent à la sphère ; le point de contact M décrit le parallèle O ; la sphère considérée est donc inscrite dans le cône, le cercle O étant la courbe de contact ; on dit que la sphère est de *raccordement* avec le cône le long du parallèle.

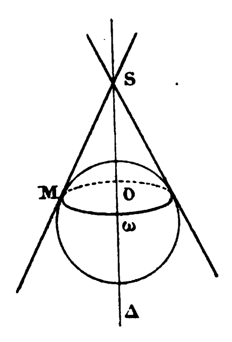


Fig. 137.

Réciproquement, si on peut inscrire une sphère dans un cône, ce cône est de révolution. Nous avons déjà établi cette propriété dans l'étude de la sphère.

Cylindre de révolution. — C'est la surface engendrée par une droite tournant autour d'un axe qui lui est parallèle, c'est-à-dire un cône de révolution dont le sommet est à l'infini dans la direction de l'axe.

Tous les parallèles sont égaux ; la sphère inscrite est de raccordement avec le cylindre le long d'un grand cercle ; le rayon de la sphère inscrite s'appelle le *rayon du cylindre*. On sait également qu'un cylindre circonscrit à une sphère est forcément de révolution.

Contours apparents des cônes et des cylindres de révolution. — Nous avons vu que le contour apparent horizontal, par exemple, se composait des traces des plans tangents verticaux. Inscrivons une sphère dans la surface conique ou cylindrique ; tous

les plans tangents à la surface sont tangents à la sphère ; pour avoir les contours apparents, il suffit de mener à la sphère inscrite des plans tangents verticaux passant par le sommet du cône, ou parallèles aux génératrices du cylindre.

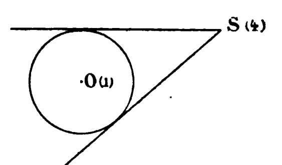


Fig. 138.

Par exemple, un cône de sommet s (4) (fig. 138), circonscrit à une sphère o (1), aura pour contour apparent horizontal l'ensemble des deux tangentes menées de s au cercle o, puisque ce sont les traces des plans tangents à la sphère menés par la verticale du point s.

Cône de révolution donné par son axe et une génératrice. — Un cône a pour axe la droite $s\delta$; il est engendré par la génératrice sg (fig. 139) ; pour déterminer ce cône, cherchons une sphère inscrite ; nous aurons ainsi le contour apparent du cône et une directrice, cercle de contact du cône et de la sphère qu'on sait déterminer.

Rabattons le plan formé par l'axe et la génératrice donnée autour d'une horizontale h_6, sur le plan horizontal de cote 6.

Le sommet est rabattu en s_1 ($ss' = 4$). Les points o sur $s\delta$ et γ sur sg restent fixes ; ces deux droites sont rabattues suivant $s_1\gamma$ et s_1o.

La distance du point o de l'axe à la génératrice, c'est-à-dire le rayon de la sphère inscrite de centre o, est la longueur de la perpendiculaire abaissée de o sur sg_1. Le point o restant fixe, lorsqu'on relève le plan rabattu, on n'a qu'à décrire de o avec le rayon ainsi construit le cercle de contour apparent de la sphère.

Le cône aura pour contour apparent les tangentes menées de s à ce cercle. Nous aurions pu chercher le parallèle décrit par un point de sg tournant autour de $s\delta$; nous avons préféré déterminer le cône par une sphère inscrite ; cette méthode donne immédiatement les génératrices de contour apparent et, de plus, la sphère inscrite sert à la résolution de tous les problèmes relatifs aux surfaces de révolution.

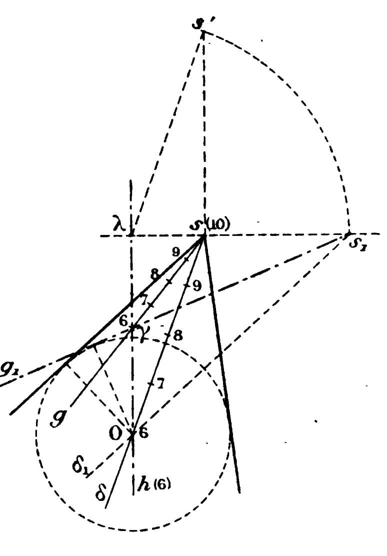


Fig. 139.

On opérerait de même si l'on donne l'axe et l'angle au sommet.

Cône de révolution donné par trois génératrices. — Ces conditions suffisent à déterminer un cône de révolution, à condition de fixer à l'avance les portions des trois droites concourantes qui doivent se correspondre.

Soient trois droites concourant en un point s (fig. 140).

Cherchons un cône de révolution contenant les trois droites et tel que les points g_1, g_2, g_3, soient sur une même nappe du cône.

Le lieu des points équidistants des trois droites est une droite SΔ intersection des plans bissecteurs

des trois couples de droites, ces plans étant choisis de manière que SΔ soit à l'intérieur du trièdre de sommet s.

Rappelons qu'on obtient simplement cette droite SΔ en prenant sur les trois droites des longueurs égales $sg_1 = sg_2 = sg_3$ et en menant aux points g_1, g_2, g_3 des plans perpendiculaires à sg_1, sg_2, sg_3. Les trois plans ainsi obtenus se coupent en un point Δ; SΔ est la droite cherchée.

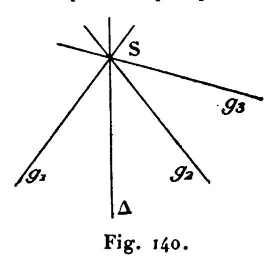


Fig. 140.

On prend alors un point quelconque ω sur SΔ; on décrit de ce point une sphère ayant pour rayon la distance de ω à l'une des droites; le cône cherché est le cône de sommet S circonscrit à cette sphère.

Remarque. — Si l'on prend les longueurs égales sur Sg_1, Sg_2, et sur le prolongement de Sg_3, on obtient une seconde droite telle que Δ, intersection cette fois de deux plans bissecteurs extérieurs et d'un intérieur; on voit qu'il existe en tout quatre axes de cônes répondant à la question.

Cylindre de révolution donné par son axe et un point. — L'axe du cylindre est projeté suivant td, t étant la trace, et d ayant la cote 3 ; on demande de déterminer le cylindre de révolution autour de cet axe et passant par le point m (3) (fig. 141).

Abaissons du point M une perpendiculaire sur l'axe et cherchons sa longueur.

Prenons le plan vertical td pour plan de projection auxiliaire, en le rabattant sur le plan horizontal ; l'axe est projeté en td' ($dd' = 3$), m est projeté en m' ($\lambda m' = 3$).

Abaissons, dans le plan vertical, la perpendiculaire $m'o'$ à td'; le point o', projeté en o, est, d'après le théorème des trois perpendiculaires, le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe.

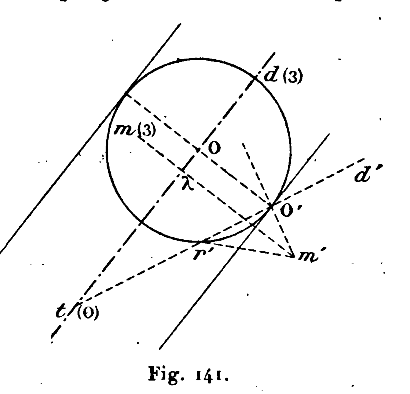


Fig. 141.

La distance de M à l'axe est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté est $m\lambda$, l'autre $o'm'$. Nous avons construit cette distance en $m'r'$ $(o'r' = m\lambda)$, c'est le rayon du parallèle du point m, et en même temps le rayon de la sphère inscrite dans le cylindre; le cylindre est donc déterminé.

Si l'on donne l'axe et le rayon, il suffit de tracer, d'un point de l'axe, avec ce rayon, un cercle contour apparent d'une sphère inscrite.

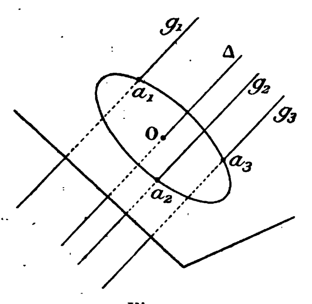


Fig. 142.

Cylindre de révolution donné par trois génératrices. — Soient trois droites parallèles g_1, g_2, g_3, par lesquelles on veut faire passer un cylindre de révolution (fig. 142). L'axe aura tous ses points équidistants des trois droites; le lieu des points équidistants de g_1 et g_2 est le plan perpendiculaire au plan de ces deux droites menées par la parallèle à g_1, g_2 située dans leur plan et passant par

le milieu de leur intervalle ; de même, le lieu des points équidistants de g_1 et g_3 est un plan perpendiculaire au plan $g_2 g_3$ mené par une droite analogue.

L'intersection de ces deux plans est l'axe.

Pour en avoir un point, coupons par un plan perpendiculaire aux génératrices ; nous obtenons les points a_1, a_2, a_3 sur ces génératrices ; le centre du cercle passant par ces trois points est un point de l'axe du cylindre ; le rayon du cercle est le rayon du cylindre, qui est ainsi déterminé.

PLANS TANGENTS

Plans tangents aux cônes. — Soit un plan tangent en un point M à une surface conique. Menons le parallèle qui passe par ce point, et considérons la sphère de raccordement le long de ce parallèle (fig. 143). Le plan tangent en M est aussi tangent à la sphère ; il est perpendiculaire au rayon ωM.

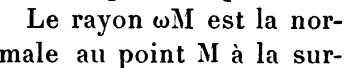


Fig. 143.

Cette droite ωM est une droite du plan méridien passant par l'axe et la génératrice SM ; donc *le plan méridien est perpendiculaire au plan tangent.*

Le rayon ωM est la normale au point M à la surface ; lorsque SM, en tournant autour de SΔ, engendre le cône, ω reste fixe, la normale ωM décrit un cône de révolution dont le sommet ω est sur l'axe.

On en conclut que les normales en tous les points d'un parallèle rencontrent l'axe au même point ω, qui est le sommet du cône des normales, et en même

temps le centre de la sphère de raccordement avec le cône le long du parallèle considéré.

Cylindre. — Soit un point M, traçons le cercle perpendiculaire à l'axe passant par M, et considérons la sphère de raccordement avec le cylindre le long de ce cercle; le centre de la sphère est au centre du cercle (fig. 144).

Le plan tangent au cylindre en M est tangent à la sphère ; il est donc perpendiculaire au rayon ωM, qui est contenu dans le plan méridien passant par l'axe ωΔ et la génératrice.

Ce plan méridien est donc perpendiculaire au plan tangent en M ; la normale en M au cylindre est ωM.

Lorsque la génératrice, en tournant autour de SΔ, engendre le cylindre, les normales le long du parallèle au point M passent encore par un point fixe ω, sur l'axe, qui est le centre de la sphère inscrite ; le cône des normales se réduit à un plan perpendiculaire à l'axe, qui est le plan du parallèle du point M.

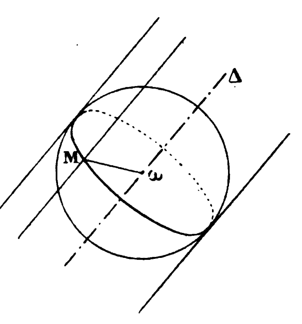


Fig. 144.

Plan tangent en un point. — D'après les considérations qui précèdent, il suffit de mener par la génératrice qui passe par le point un plan perpendiculaire au méridien, c'est-à-dire au plan qui passe par l'axe et le point donné.

Problème. — ***Étant donné la projection horizontale d'un point d'un cône de révolution, trouver la***

projection verticale et le plan tangent en ce point. — On peut se servir d'une sphère inscrite, dont nous avons montré précédemment la détermination.

Soit m la projection donnée, S le sommet du cône; on coupe par le plan vertical sm; ce plan donne dans la sphère un cercle auquel les génératrices projetées suivant sm doivent être tangentes; on mène par le sommet des tangentes à ce cercle; on obtient deux génératrices sur lesquelles se trouvent les points projetés en m. Nous avons montré comment on trouve le centre et le rayon d'une sphère inscrite dans un cône de révolution donné d'une manière quelconque.

Cylindre de révolution. — Etant donnée la projection* m *d'un point du cylindre, trouver sa cote et le plan tangent. — Nous supposons qu'on a déterminé d'abord une sphère inscrite dans le cylindre (fig. 145).

Soient donc une sphère de centre o (5) et $o\delta$ l'axe d'un cylindre circonscrit.

On demande de déterminer les cotes des points du cylindre projetés en m.

Menons mg parallèle à $o\delta$ et coupons par le plan vertical mg; prenons ce plan pour plan vertical auxiliaire en le rabattant sur le plan horizontal du point o, de cote 5.

Le petit cercle d'intersection du plan vertical avec la sphère est projeté en vraie grandeur; il faut mener à ce cercle des tangentes parallèles à l'axe, dont la projection sur le plan vertical est $o'\ l'$, obtenue en portant $l'\lambda = 2$ différence des cotes.

Les contacts de ces tangentes sont sur le rayon perpendiculaire en p' et q'; m est projeté sur ces tangentes, qui sont les génératrices du cylindre proje-

tées suivant mg, ou m' ou en μ'. Les cotes des points projetés en m sont $mm' + 5$ et $5 - m\mu'$ puisque le plan horizontal du centre sur lequel on a rabattu est de cote 5.

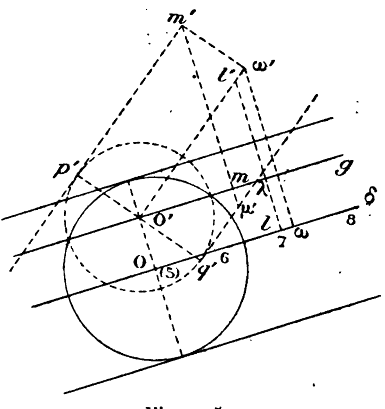


Fig. 145.

Le plan perpendiculaire à l'axe mené par (mm') est perpendiculaire au plan vertical auxiliaire; il rencontre δ' en ω' projeté horizontalement en ω, qui serait le centre du parallèle décrit par M.

Le plan tangent en (m, m') est le plan perpendiculaire au rayon ωm en m, plan que l'on sait déterminer.

Plans tangents par un point extérieur à la surface, ou parallèles à une direction donnée. — *Cône*. — Inscrivons une sphère dans le cône; tous les plans tangents au cône sont tangents à la sphère; les plans tangents demandés contiendront la droite qui joint le sommet du cône au point donné; le problème revient à mener par cette droite les plans tangents à la sphère.

Si le point donné est à l'infini dans une direction donnée (plan tangent parallèle à une direction), on joint encore le sommet à ce point, c'est-à-dire qu'on mène par le sommet une parallèle à la direction donnée; on fait ensuite passer par cette droite les plans tangents à la sphère; ce sont les plans tangents au cône parallèles à la direction donnée.

Cylindre. — La méthode est la même, le sommet du cône devenu un cylindre étant à l'infini dans la direction des génératrices.

Pour mener à un cylindre les plans tangents par un point donné, on mène par ce point une parallèle aux génératrices, et par cette droite on mène les plans tangents à une sphère inscrite.

Si l'on veut les plans tangents parallèles à une direction donnée, ces plans sont aussi parallèles aux génératrices; on a donc leurs directions en menant par un point une parallèle aux génératrices et une parallèle à la direction donnée; on mène à la sphère inscrite les plans tangents parallèles à un plan donné.

Epure. — Supposons une sphère inscrite déterminée; soit la sphère de centre o (1); s (3) est le sommet du cône; m (2) le point par lequel il faut mener les plans tangents (fig. 146).

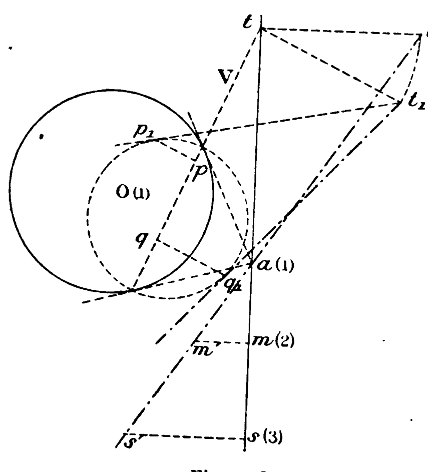


Fig. 146.

Joignons sm et déterminons sur cette droite le point a de cote 1, en rabattant le plan vertical sm sur le plan horizontal de cote 1 ($ss' = 2$; $mm' = 1$).

Le cône de sommet a circonscrit à la sphère a son ercle de contact dans le plan vertical V; rabattons

ce plan sur le plan horizontal de cote 1 ; la trace (tt') de sm est rabattue en t_1; les contacts des tangentes menées de t_1 sont p_1 et q_1, projetés en p et q; p, par exemple, a pour cote $pp_1 + 1$.

Ces points déterminent, avec la droite sm, les plans tangents au cône passant par M.

NORMALES COMMUNES AUX CÔNES ET AUX CYLINDRES DE RÉVOLUTION

On peut employer les méthodes indiquées pour des cônes et des cylindres quelconques, mais il est préférable de procéder autrement, comme nous allons le montrer.

Le plan tangent en un point est perpendiculaire au plan du méridien qui passe par le point; par suite, ce plan méridien contient la normale, et cette normale rencontre l'axe de la surface.

Dans le cas qui nous occupe, il suffit donc de trouver la direction d'une normale commune et de mener une droite parallèle à cette direction s'appuyant sur les deux axes.

Cône et cylindre. — Inscrivons une sphère dans le cône ; circonscrivons à cette sphère un cylindre parallèle au cylindre donné; les plans tangents aux deux cylindres, qui sont homothétiques, sont parallèles.

Il suffit, pour avoir les directions des normales communes, de les chercher dans cette nouvelle position.

Le cône a les mêmes plans tangents que la sphère tout le long de la courbe de contact C (fig. 147).

Le cylindre a les mêmes plans tangents que la

sphère tout le long de la courbe de contact D; les cercles C et D se coupent en deux points A et B; en ces points, le plan tangent au cône et au cylindre est le même que le plan tangent à la sphère. Les directions des normales communes sont donc les rayons OA et OB.

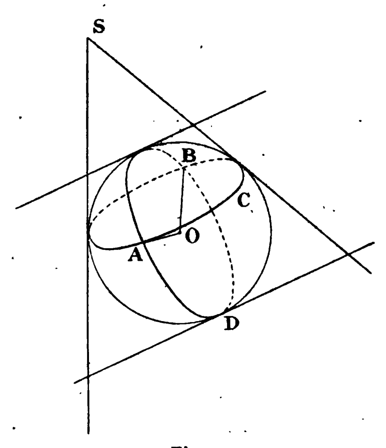


Fig. 147.

On mène alors une droite parallèle à OA s'appuyant sur l'axe du cône et sur l'axe du premier cylindre; cette droite sera une normale commune. Il y a deux solutions seulement, tandis que la méthode générale en donne quatre; cela tient à ce que chaque solution compte pour deux, une normale au cylindre de révolution étant nécessairement normale en deux points diamétralement opposés sur le cylindre.

Deux cylindres. — Une normale commune doit être perpendiculaire à un plan parallèle aux génératrices, c'est-à-dire aux axes des deux cylindres, et s'appuyer sur ces deux axes.

Les quatre solutions se confondent en une seule qui est la perpendiculaire commune aux deux axes.

Deux cônes. — La méthode est la même que pour cône et cylindre.

On inscrit une sphère dans l'un des cônes, et l'on circonscrit à cette sphère un cône parallèle à l'autre;

les cercles de contact se coupent en deux points; les rayons de la sphère aboutissant en ces points sont les directions des normales communes.

On mène ensuite les droites parallèles à ces directions s'appuyant sur les axes des deux cônes donnés.

Le problème a quatre solutions, car, la sphère inscrite dans le premier cône étant fixée, on peut amener le deuxième cône à lui être circonscrit de deux manières, comme l'indique suffisamment la figure. Chacune des manières donne deux solutions. Les quatre directions de normales sont OA, OB, OC, OD (fig. 148).

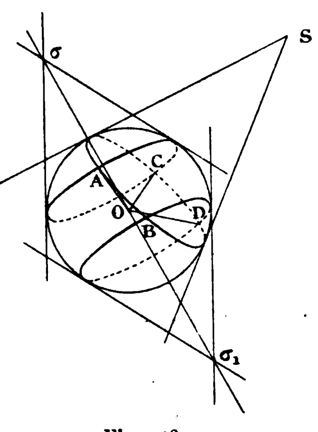


Fig. 148.

PROBLÈMES RELATIFS AUX PLANS TANGENTS AUX CÔNES ET AUX CYLINDRES DE RÉVOLUTION

Mener par une droite un plan de pente donnée. — Nous avons traité ce problème directement : on peut expliquer la solution de la manière suivante :

Commençons par rappeler que tous les plans de pente donnée font avec le plan horizontal le même angle facile à construire par un triangle rectangle.

Prenons un point S sur Δ (fig. 143). Tous les plans passant par S et faisant avec le plan horizontal un angle donné sont tangents à un cône de révolution de sommet S, dont l'axe est vertical et dont le demi-angle au sommet est le complément de l'angle donné.

Le problème revient à mener par Δ, qui passe par S, des plans tangents au cône. L'un des plans est déterminé par Δ et la tangente TA à un cercle du cône. Nous avons vu quelle était la condition de possibilité; la droite doit avoir une pente moindre que celle du plan.

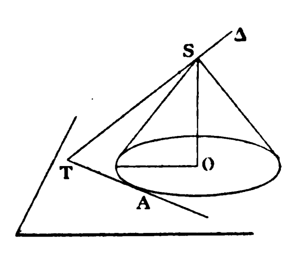


Fig. 149.

Mener à une sphère par un point un plan tangent faisant avec un plan donné un angle donné. — Tous les plans tangents à la sphère faisant un angle donné avec le plan P sont tangents à un cône circonscrit à la sphère, tel que son demi-angle au sommet soit le complément de l'angle donné.

Pour trouver la courbe de contact de ce cône, on mène OS perpendiculaire au plan P (fig. 150); dans le plan d'un grand cercle passant par OS, on mène le rayon OC faisant avec OS l'angle donné; le cercle de contact du cône est situé dans le plan perpendiculaire à OS mené par C. Il suffit de mener à ce cône un plan tangent passant par M.

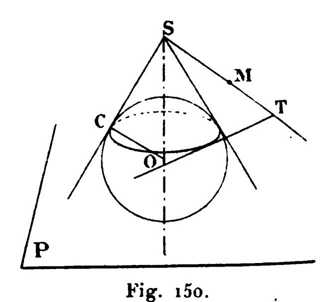


Fig. 150.

Trouver un plan qui soit à une distance donnée d'une droite, et qui fasse avec un plan donné un angle déterminé. — Tous les plans situés à une distance donnée r d'une droite Δ sont tangents à un cylindre de révolution d'axe Δ et de rayon r (fig. 151).

Tous ces plans sont tangents à une sphère O inscrite dans le cylindre.

Soit P le plan donné.

Circonscrivons à la sphère O un cône d'axe perpendiculaire à P et dont le demi-angle au sommet soit le complément de l'angle donné α.

Il suffit, pour cela, de mener par O une perpendiculaire à P et de tracer un rayon faisant avec *os* l'angle α; en menant la tangente au grand cercle, on obtient le sommet S du cône.

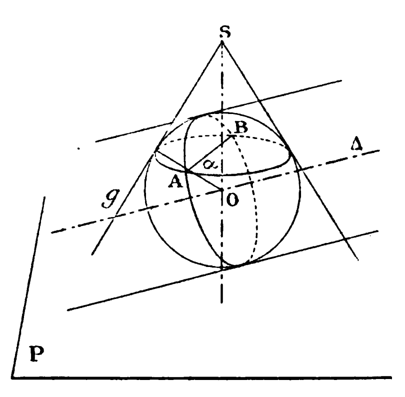


Fig. 151.

Les cercles de contact du cône et du cylindre se coupent en A et B; les plans tangents à la sphère en ces points répondent à la question.

On obtient les points A et B en prenant la droite d'intersection des plans des cercles de contact du cône et du cylindre avec la sphère, puis les points d'intersection de cette droite avec la sphère.

Cas particulier. — Si le plan P est le plan horizontal, on peut énoncer le problème :

Mener à un cylindre de révolution un plan tangent de pente donnée. — Soit un cylindre de révolution dont les génératrices ont la pente 1/2, circonscrit à une sphère dont le centre *o* est dans le plan horizontal (fig. 152).

L'axe du cylindre est projeté suivant $o\delta$.

Prenons $o\delta$ comme plan vertical auxiliaire et rabattons-le sur le plan horizontal.

L'axe est projeté en $o\delta'$ telle que tang $\delta' o \delta = \frac{1}{2}$ (il suffit de prendre $\alpha\beta$ égal à la moitié du rayon de la sphère).

La courbe de contact du cylindre et de la sphère est le plan de bout D'.

Circonscrivons à la sphère un cône d'axe vertical

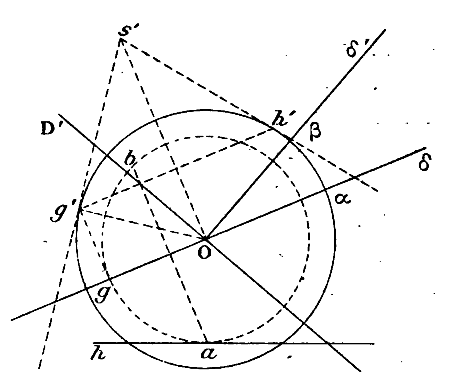


Fig. 152.

os' ; s' est obtenu en menant le rayon og' tel que $g'os'$ soit l'angle correspondant à la pente donnée.

La courbe de contact du cône est le cercle situé dans le plan horizontal $g'h'$ projeté suivant un cercle de centre o et de rayon og.

La projection horizontale de l'intersection de D' et de h' rencontre ce cercle en deux points a et b, dont la cote est celle de g'.

Le plan tangent en un de ces points, a, par exemple, est déterminé par le point s projeté en o (de cote os') et la tangente horizontale ah (de cote gg').

Condition de possibilité. — Il faut que D' coupe

$g'h'$ entre g' et h', c'est-à-dire que la pente donnée soit supérieure à la pente de la droite δ.

Nombre des solutions. — Si la condition précédente est remplie, il y a quatre solutions : deux qui sont données par les points a et b et deux autres données par les points diamétralement opposés : ces solutions peuvent être confondues deux à deux. Si la pente donnée est égale à celle des génératrices, on obtient les deux plans tangents parallèles pour lesquels la génératrice est une ligne de plus grande pente.

Intersection d'un cône ou d'un cylindre de révolution avec une sphère ayant son centre sur l'axe. — Prenons comme plan du tableau un plan méridien.

Soient M et P les points d'intersection d'une génératrice avec le grand cercle de la sphère (fig. 153 et 154).

Si nous faisons tourner les figures autour de l'axe

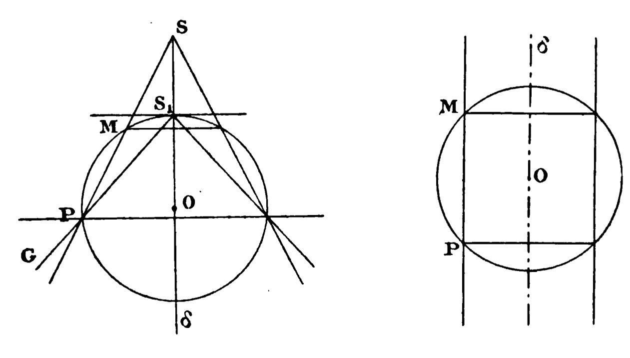


Fig. 153. Fig. 154.

δ, M et P engendreront chacun un cercle qui sera à la fois sur la sphère et sur la surface ; l'intersection

se compose donc de deux cercles dont le plan est perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire de deux parallèles, qui sont confondues suivant le cercle de contact, si la sphère est inscrite dans la surface.

Dans le cas du cône, si le point M se rapproche du point S, l'intersection se compose toujours de deux cercles; à la limite, lorsque la sphère passe par le point S, le second cercle est un cercle de rayon nul, réduit au point S, mais situé dans le plan perpendiculaire à l'axe au point S, c'est-à-dire dans le plan tangent à la sphère au point S.

Intersection de deux cônes de révolution de même sommet. — Soient deux cônes *sg*, d'axe *sd* et $s\gamma$, d'axe $s\delta$ (fig. 155).

Coupons les deux cônes par une sphère ayant pour centre le sommet commun. Elle détermine sur chacun des cônes deux cercles qui se coupent, en général, en huit points, diamétralement opposés deux à deux.

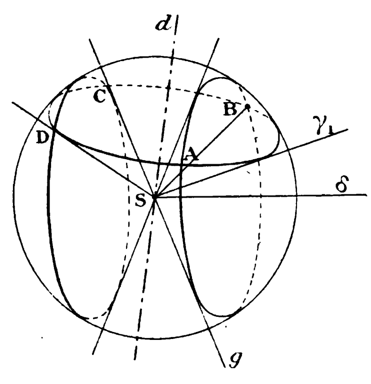


Fig. 155.

En joignant ces points au point S, on obtient quatre génératrices communes aux deux cônes, SA, SB, SC, SD.

Si un cercle déterminé dans le cône $s\delta$ ne rencontre qu'un des deux cercles d'intersection de la sphère avec le cône S*d*, il n'y a que deux génératrices communes réelles.

Si les cercles ne se rencontrent pas, il n'y a pas de génératrices réelles communes aux deux cônes.

Nous avons figuré les trois cas qui peuvent se pré-

senter en prenant des projections sur le plan des axes des deux cônes (fig. 156).

a. Les quatre génératrices sont réelles, deux sont projetées suivant AC, les deux autres suivant BD.

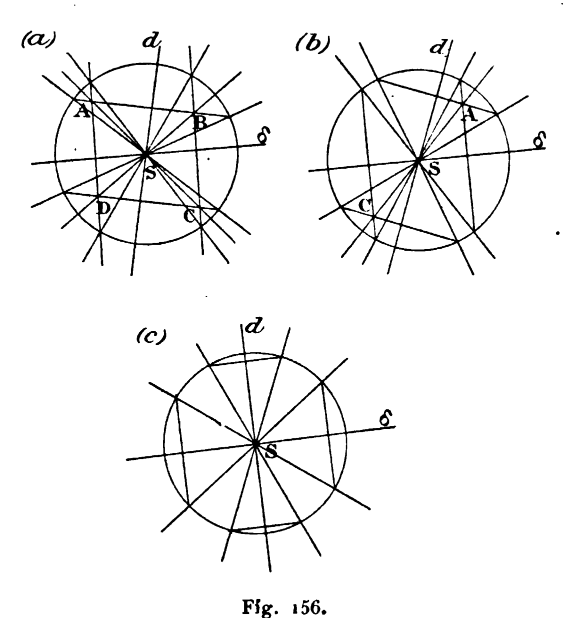


Fig. 156.

b. Deux génératrices sont réelles, elles sont projetées suivant AC.

c. Les deux cônes n'ont pas de génératrice commune réelle.

APPLICATIONS. — ***Mener par un point une droite faisant avec deux plans donnés des angles déterminés.*** — Soient S le point, P et Q les deux plans, α et β les angles que doit faire la droite avec P et Q.

Toutes les droites passant par S et faisant avec P un angle donné sont les génératrices d'un cône de

révolution, de sommet S, d'axe perpendiculaire à P, dont le demi-angle au sommet est $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

De même le lieu géométrique des droites faisant l'angle β avec Q est un cône de sommet S, de révolution autour d'une perpendiculaire à Q et dont le demi-angle au sommet est égal à $\frac{\pi}{2} - \beta$.

L'intersection de ces deux cônes donne les droites demandées.

Soit un plan P donné par sa trace P_0 et un point l (3,5) ; un plan Q dont la trace est Q_0 et qui passe par le point m (3), s (2) le point par lequel doit passer la droite demandée (fig. 157).

Le cône de sommet S perpendiculaire au plan P a son axe projeté suivant sd.

Prenons le plan vertical sd comme plan de projection auxiliaire, et rabattons-le sur le plan horizontal de cote 2 ; s reste fixe ; l est projeté en l' à une distance de d égale à 1,5 ; p est projeté en p' ($pp' = 2$) ; $p'l'$ est une ligne de pente du plan, c'est-à dire que la trace du plan P sur le plan vertical auxiliaire est $p'l'$.

L'axe du cône, qui lui est perpendiculaire, est projeté suivant sd'. Menons $s'g'$ telle que l'angle $g'sd'$ égale $\frac{\pi}{2} - \alpha$; $g's$ est une des génératrices du cône situées dans le plan vertical sd.

Une sphère de centre s coupe ce cône suivant deux cercles : prenons celui qui est dans le plan de bout $r'l'$.

En faisant les constructions analogues pour le cône perpendiculaire au plan Q, en prenant le plan vertical $s\delta$ pour deuxième plan vertical auxiliaire, on trouve que la sphère considérée coupe le cône suivant deux

cercles dont l'un est dans le plan de bout (par rapport au nouveau plan vertical) $\rho'\theta'$.

Nous allons prendre l'intersection du plan $r't'$ et du plan $\rho'\theta'$, puis l'intersection de la droite ainsi déter-

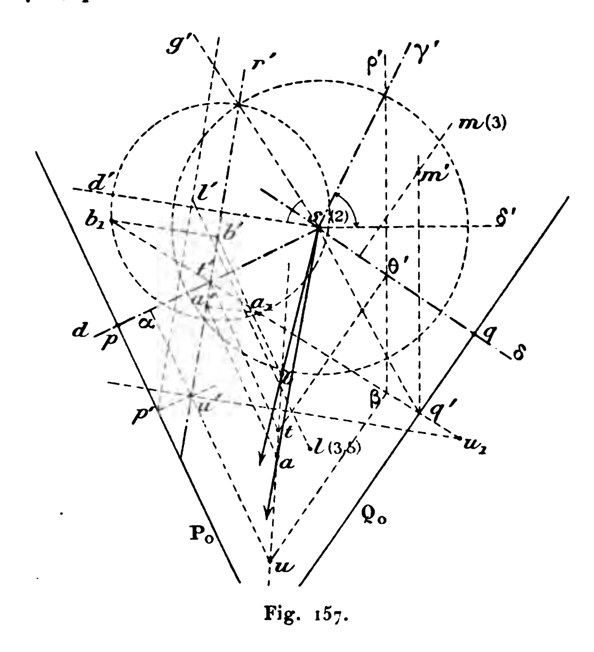


Fig. 157.

minée avec l'un des cercles, par exemple avec le cercle du plan $r't'$.

Les traces des deux plans sur le plan horizontal de cote 2 se rencontrent au point t.

En coupant par le plan horizontal de projection, c'est-à-dire par le plan horizontal dont la trace passe par p' sur le plan vertical sd et par q' sur le plan vertical $s\delta$, on obtient deux horizontales qui se rencontrent en u.

tu est la projection horizontale de l'intersection des deux plans.

Rabattons le plan $r't'$ sur le plan vertical sd ; t' reste fixe, u, u' est rabattu en u_1 à une distance égale à son éloignement αu.

$t'u_1$ rencontre le rabattement du cercle en a_1 et b_1 projetés en a' et b' sur $r't'$ et en a et b sur ut.

sa et sb sont deux droites répondant à la question.

Mener par un point une droite qui passe à des distances données de deux points donnés. — Soient M et P les deux points ; d et r les distances données ; S le point par lequel doit passer la droite cherchée.

Toutes les droites issues du point S qui sont à une distance d du point M sont tangentes à une sphère de centre M et de rayon d; devant être à une distance r de P, elles sont tangentes à la sphère de centre P et de rayon r.

Les droites cherchées seront les génératrices communes aux deux cônes qui représentent le lieu des tangentes issues de S à la sphère M et à la sphère P.

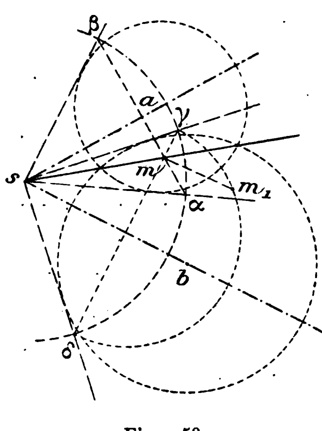


Fig. 158.

Nous supposerons les trois points dans le plan horizontal (fig. 158). Soient les points a, b, s.

Des points a et b comme centre, décrivons deux sphères avec les distances données comme rayons. Les cônes circonscrits sont coupés par le plan horizontal suivant les droites $s\alpha$, $s\beta$, $s\gamma$, $s\delta$. Pour avoir les génératrices communes, coupons-les par une sphère

de centre s; elle donne deux cercles verticaux $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ se coupant en deux points projetés en m.

sm est une des droites cherchées, la cote du point m étant mm_1, mesurée à l'échelle du dessin.

Mener par un point une droite passant à des distances données de deux droites données. — Soient M le point, D et Δ les deux droites.

Le lieu des droites passant par M et à une distance donnée de D se compose des plans tangents menés par M au cylindre ayant D pour axe et pour rayon la

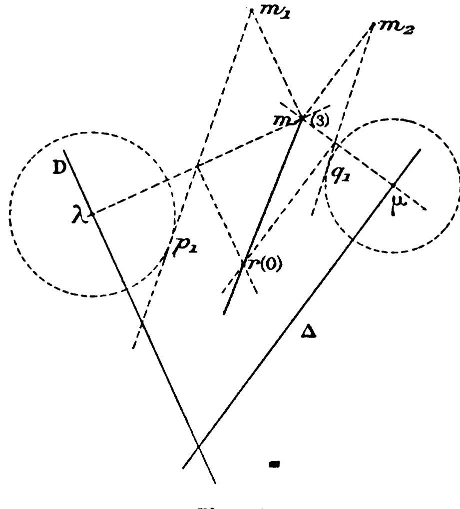


Fig 159.

distance donnée. De même pour les droites passant à une distance donnée de Δ. Les droites cherchées seront donc les intersections des plans tangents menés par M aux deux cylindres ayant pour axes D et Δ et pour rayons les distances données. Il y a quatre solutions.

Supposons les droites D et Δ dans le plan horizontal le point M quelconque. Soit m (3) sa projection (fig. 159).

Pour mener le plan tangent au cylindre d'axe D, prenons pour plan vertical le plan $m\lambda$ perpendiculaire à D.

Ce plan coupe le cylindre suivant un cercle de centre λ et de rayon connu, le point M se projette en m_1, et la trace du plan tangent est m_1p_1.

Pour le deuxième cylindre, la trace du plan tangent est m_2q_2. Par suite, l'intersection des deux plans tangents est la droite mr connue, puisqu'on a les cotes des points m (3) et r (o).

TRIÈDRES

Rappelons d'abord quelques propriétés des trièdres démontrées en géométrie.

Un trièdre renferme six éléments, trois faces et trois dièdres.

Dans un trièdre, la somme des faces est inférieure à quatre droits.

Une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.

La somme des dièdres est comprise entre deux droits et six droits.

Un dièdre quelconque, augmenté de deux droits, est supérieur à la somme des deux autres.

Trois quelconques des six éléments étant donnés, le problème de la construction du trièdre est déterminé ; il peut comporter plusieurs solutions, comme nous le verrons par la suite.

La résolution des trièdres comprend donc six cas. On peut donner :

1. — Trois faces.

2. — Deux faces et le dièdre compris entre ces faces.

3. — Deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles.

4. — Une face et les deux dièdres adjacents.

5. — Une face, un dièdre adjacent et le dièdre opposé.

6. — Trois dièdres.

Les cas 1 et 6, 2 et 4, 3 et 5 peuvent se ramener l'un à l'autre par la considération des trièdres supplémentaires ; on peut aussi les résoudre directement.

PREMIER CAS. — ***On donne les trois faces.*** — Soit ASB = c la plus grande face située dans le plan horizontal (fig. 160) ; la troisième arête cherchée SC est sur un cône d'axe SA, dont le demi-angle au sommet

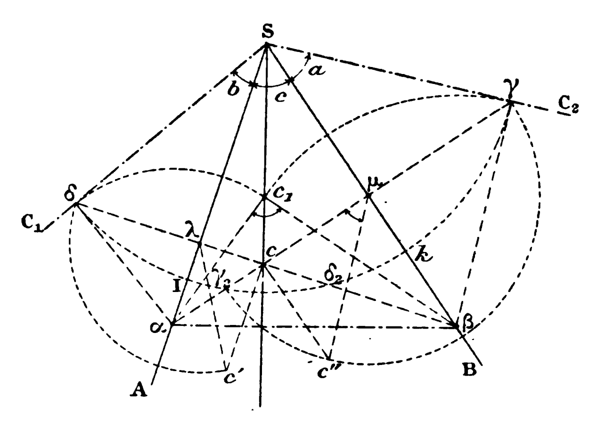


Fig. 160.

est b ; soit SC_1 la génératrice de ce cône située dans le plan horizontal (l'angle $C_1SA = b$; SC est aussi sur un cône d'axe SB, ayant pour demi-angle au sommet a ($C_2SB = a$).

Ces deux cônes ont même sommet ; pour avoir leurs génératrices d'intersection, coupons par une sphère quelconque de centre S.

Les deux parallèles déterminés par cette sphère, λδ et μγ, se coupent en deux points projetés en c.

L'arête cherchée est projetée suivant Sc. La cote de C est donnée par le rabattement du cercle $\delta\lambda$ par exemple ; cette cote est cc' au-dessus ou au-dessous du plan horizontal.

Nombre des solutions. — Deux cônes de révolution peuvent avoir quatre génératrices communes ; mais on sait, par la géométrie, que deux trièdres qui ont leurs trois faces égales sont égaux ou symétriques ; il n'y a donc qu'une solution et sa symétrique.

Condition de possibilité. — On démontre en géométrie que, dans un trièdre, la somme des faces est plus petite que quatre droits et que la plus grande est plus petite que la somme des deux autres. Nous allons vérifier par la construction que ces conditions sont suffisantes.

Il faut que la verticale du point c coupe la sphère, c'est-à-dire que c soit à l'intérieur du contour apparent de la sphère.

Nous allons montrer que, si la plus grande face est plus petite que la somme des deux autres, et si la somme des faces est inférieure à quatre droits, δ_2 se trouvera entre γ et γ_2, sur l'arc $\gamma K \gamma_2$, et le point δ sur l'autre arc sous-tendu par la même corde $\gamma\gamma_2$; les cordes $\delta\delta_2$ et $\gamma\gamma_2$ se couperont à l'intérieur du contour apparent de la sphère.

ASB étant la plus grande face, les points γ_2 et δ_2 sont entre I et K, et comme cette face est plus petite que la somme des deux autres, on a :

$$\text{arc } I\delta_2 + \text{arc } K\gamma_2 > \text{arc } IK$$

(les arcs mesurant les angles des faces) ; donc δ_2 se trouve entre γ_2 et K, c'est-à-dire sur l'arc $\gamma K \gamma_2$ (fig. 160).

D'autre part, la somme des faces étant plus petite que quatre droits, on a :

$$\text{arc } \delta I + \text{arc } IK + \text{arc } K\gamma < \text{circonférence},$$

donc δ se trouve sur l'arc sous-tendu par $I\gamma$ qui ne comprend pas le point K et *a fortiori* sur celui des arcs sous-tendus par $\gamma\gamma_2$, qui ne comprend pas le point K.

Détermination des dièdres. — En coupant par le plan vertical λc perpendiculaire à SA, et le rabattant sur le plan horizontal, on obtient en $c\lambda c'$ l'angle du plan ASC avec le plan ASB, c'est-à-dire le dièdre A ; on a de même le dièdre B en $c\mu c''$.

Pour obtenir le dièdre suivant SC, coupons par un plan perpendiculaire à cette droite en c ; une droite de ce plan est rabattue en $\gamma\beta$ perpendiculaire à SC_2 ; β est un point de sa trace horizontale ; cette trace est donc $\alpha\beta$ perpendiculaire à Sc. Rabattons le plan $c\alpha\beta$ autour de sa trace $\alpha\beta$: c est rabattu sur la perpendiculaire à $\alpha\beta$, c'est-à-dire sur Sc en c_1, tel que $\beta c_1 = \beta\gamma$ ou $\alpha c_1 = \alpha\delta$.

On obtient l'angle plan du dièdre C en $\alpha c_1 \beta$.

Deuxième cas. — ***On donne deux faces et le dièdre qu'elles comprennent.*** — Supposons donnée la face $ASB = c$ que nous plaçons sur le plan horizontal, la face b et l'angle A (fig. 161).

L'arête SC est sur un cône de révolution d'axe SA dont le demi-angle au sommet est b ; SC_1 est la génératrice de ce cône située dans le plan horizontal.

L'arête SC est aussi dans un plan mené par SA et faisant l'angle A avec le plan horizontal.

Pour trouver les génératrices d'intersection du cône

et du plan, coupons par un plan P perpendiculaire à SA et rabattons-le sur le plan horizontal.

Il donne dans le cône un cercle de rayon $\delta\lambda$ et dans le plan de la face cherchée une droite faisant avec $\delta\lambda$ l'angle donné A.

On a en c_1, projeté horizontalement en c, un point de la troisième arête, qui est projetée suivant Sc

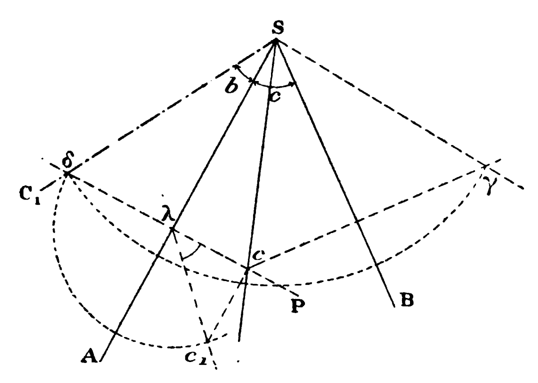


Fig. 161.

(cc_1 est la cote de c) ; on obtient la face a en rabattant le plan BSC autour de SB sur le plan horizontal, c est rabattu en γ sur la perpendiculaire à SB, en prenant $S\gamma = S\delta$, distance du point S au point projeté en c.

Les dièdres B et C s'obtiennent comme dans le premier cas.

Le problème est toujours possible, puisque le cône est toujours coupé par un plan qui passe par son axe.

TROISIÈME CAS. — ***On donne deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles.*** — On donne c, b, B (fig. 162).

Prenons le plan de la face ASB comme plan horizontal.

L'arête SC est sur un cône de révolution d'axe SA ; la génératrice SC_1 du cône située dans le plan horizontal fait avec SA le demi-angle au sommet du cône qui est *b*.

Cherchons l'intersection de ce cône avec le plan passant par SB et faisant avec le plan horizontal l'angle B.

Pour cela, coupons par un plan vertical P, perpendiculaire à l'axe du cône ; il coupe le cône suivant un cercle que nous rabattons sur le plan horizontal.

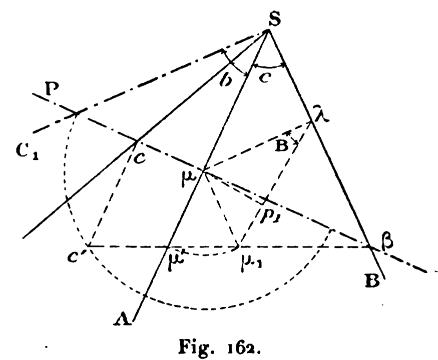


Fig. 162.

Le plan P coupe le plan mené par B suivant une droite projetée en Pβ.

β est dans le plan horizontal ; le point μ a pour cote $\mu\mu_1$, obtenue en coupant le plan vertical μλ perpendiculaire à SB et le rabattant sur le plan horizontal (l'angle $\mu\lambda\mu_1 = B$).

Dans le rabattement du plan vertical P, μ est alors rabattu en μ' ($\mu\mu' = \mu\mu_1$) ; l'intersection cherchée est rabattue suivant βμ' qui rencontre le cercle en deux points. Soit *c'* l'un de ces points, projeté en *c* sur Pβ.

S*c* est la projection de la troisième arête correspondante.

Il peut y avoir zéro, une ou deux solutions, suivant que la droite β*c'* ne coupe pas le cercle, lui est tangente ou le coupe en deux points.

Chaque solution comporte sa symétrique, puisqu'on peut prendre la cote au-dessus ou au-dessous du plan horizontal.

Le dièdre A est $C\mu C'$; on obtient la troisième face et le dièdre C comme dans les cas précédents.

Condition de possibilité. — Prenons une sphère de centre μ inscrite dans le cône ; supposons $\mu S = 1$.

Pour que le plan mené par SB et faisant l'angle B avec le plan horizontal coupe le cône, il faut qu'il coupe la sphère, dont le rayon est sin b. Pour cela, il faut que la distance du point μ au plan soit inférieure au rayon.

Cette distance est obtenue en μp_1 par le rabattement du plan projetant la perpendiculaire $\mu\lambda$ au plan (l'angle $\mu\lambda p_1 = B$).

La condition est $\mu p_1 < \sin b$. Or, $\mu p_1 = \mu\lambda \sin B$; $\mu\lambda = \sin c$.

Il faut donc $\sin B \sin c < \sin b$.

Quatrième cas. — ***On donne une face et les deux dièdres adjacents.*** — Plaçons la face donnée ASB dans le plan horizontal.

Cherchons l'intersection des plans menés par SA et SB faisant avec le plan horizontal les angles donnés A et B.

Coupons par un plan vertical $P\beta$ perpendiculaire à SA, et rabattons-le sur le plan horizontal (fig. 163); l'intersection avec le plan mené par SA est $\lambda\alpha$ ($\alpha\lambda\beta = A$).

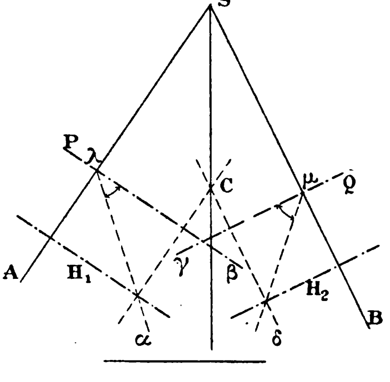


Fig. 163.

Coupons de même par un plan $Q\gamma$ perpendiculaire

sur SB, l'intersection avec le plan mené par SB est la droite $\mu\delta$ ($\gamma\mu\delta = B$).

Les deux plans étant ainsi déterminés, coupons-les par un plan horizontal de cote arbitraire dont les intersections avec les plans verticaux Pβ et Qγ sont H_1 et H_2 ; les projections de ces deux horizontales se coupent en c ; la troisième arête est Sc.

On a donc une solution et sa symétrique, puisqu'on peut faire les angles A et B au-dessous du plan horizontal.

On trouve les faces et le troisième dièdre comme dans les cas précédents.

Le problème est toujours possible, puisque deux plans qui ont en commun un point se coupent toujours suivant une droite à distance finie.

Cinquième cas. — *On donne une face, un dièdre adjacent, le dièdre opposé.* — Plaçons la face donnée ASB dans le plan horizontal (fig. 164).

Prenons pour plan vertical auxiliaire un plan V perpendiculaire à SA.

La trace du plan de la face ASG est $s'c'$.

Il faut prendre l'intersection de ce plan avec un plan mené par SB et faisant avec le plan $c's'$S un angle C. Ce plan sera tangent à un cône ayant son sommet en un point de la droite SB, σ par exemple, son axe $\sigma o'$ perpendiculaire au plan, et, pour demi-angle au sommet, le complément de l'angle C. Traçons la génératrice de ce cône située dans le plan V. La trace de SB sur le plan $c's'$S, que nous prenons pour plan de base du cône, est le point s'S; il faut mener de ce point une tangente à la base du cône ; ce sera précisément la troisième arête.

Rabattons le plan de bout c'S$'$ sur le plan vertical V.

Le cercle de base du cône est rabattu suivant un cercle dont nous avons le rayon. Ss' est rabattu en S_1 ($s'S_1 = s'S$).

Menons de S_1 une tangente S_1c_1 ; c_1 se projette en c'.

L'arête correspondante est projetée en Sc.

On obtient les faces a, b et le dièdre B comme dans les cas précédents.

Condition de possibilité. — Pour que le problème soit possible, il faut qu'on puisse mener par la droite $S\sigma$ des plans tangents au cône et pour cela que l'angle θ que fait $S\sigma$ avec l'axe $\sigma o'$ soit plus grand que le demi-angle au sommet du cône, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} - c$.

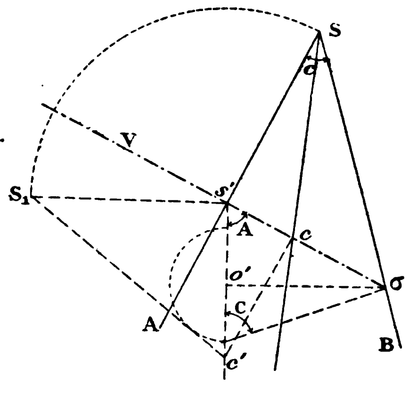


Fig. 164.

Mais on a, en considérant le triangle de l'espace $S\sigma o'$

$$\cos \theta = \frac{\sigma o'}{\sigma S}$$

Or :

$$\sigma o' = \sigma s' \sin A,$$

$$\sigma S = \frac{\sigma s'}{\sin c}, \quad \text{donc} \quad \cos \theta = \sin A \sin c.$$

La condition de possibilité est donc :

$$\sin A \sin c < \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \quad \text{ou} \quad \sin A \sin c < \sin C.$$

Cette condition étant remplie, on a deux solutions, qui peuvent être confondues, et leurs symétriques obtenues en faisant l'angle A au-dessous du plan horizontal.

Sixième cas. — *On donne les trois dièdres.* — Prenons comme plan horizontal le plan d'une face, *c* par exemple, et donnons-nous arbitrairement l'arête A (fig. 165).

Prenons un plan vertical auxiliaire V perpendiculaire à l'arête A et rabattons-le sur le plan horizontal choisi. La trace du plan de la face ASC est $\alpha P'$, l'angle en α étant A. (α P' est le rabattement d'une ligne de plus grande pente du plan).

Nous allons mener un plan faisant avec le plan horizontal l'angle B et avec le plan $P'\alpha A$ l'angle C.

Traçons une sphère de centre (oo'), dans le plan horizontal et sur V.

Tous les plans tangents à cette sphère faisant avec le plan $P\alpha A'$ l'angle C sont tangents à un cône de révolution, d'axe perpendiculaire au plan, dont le demi-angle au sommet est $\frac{\pi}{2} - C$.

On obtient le sommet t' en menant le rayon $o'l'$ faisant avec le rayon perpendiculaire au plan l'angle C, comme l'indique la figure, sur la projection auxiliaire.

De même, tous les plans tangents à la sphère faisant l'angle B avec le plan horizontal sont tangents à un cône de sommet θ', d'axe vertical, déterminé d'une manière analogue.

Les plans tangents communs à ces deux cônes répondent à la question, c'est-à-dire déterminent le plan de la troisième face.

Or, les plans tangents contiennent la droite des sommets qui est projetée en θ′t′ et a pour trace horizontale le point ω. Il suffit alors de mener par cette droite un plan tangent à l'un des deux cônes, par

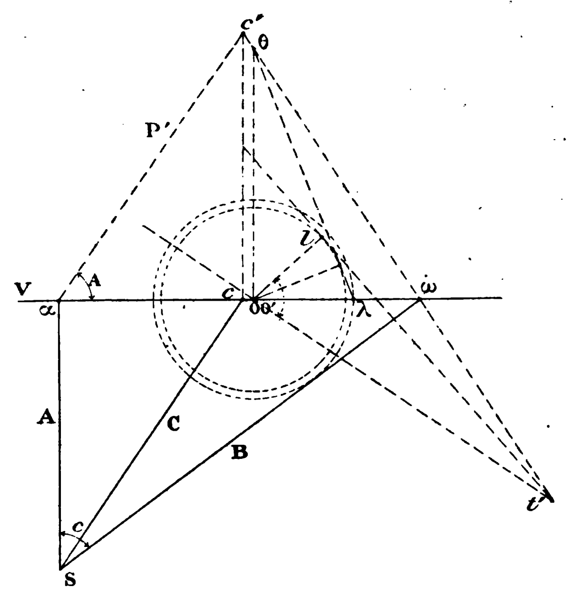


Fig. 165.

exemple au cône vertical dont la trace est le cercle de rayon $o\lambda$. La tangente ωS est la trace horizontale du plan tangent. Ce sera donc l'arête SB.

La troisième arête est l'intersection du plan tangent avec le plan P′αA, par suite la droite *sc*, puisqu'on en a un point *c′c*.

On obtient les faces autres que *c*, qui est figurée en ASB en vraie grandeur, par le rabattement de leurs plans autour de SA et SB.

Condition de possibilité. — On démontre en géométrie que dans un trièdre la somme des dièdres

est comprise entre deux droits et six droits et que le plus petit, augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres. Ces conditions sont suffisantes, car, si elles sont remplies, le trièdre supplémentaire est tel que la somme de ses faces est plus petite que quatre droits et la plus grande face plus petite que la somme des deux autres. Le trièdre supplémentaire est donc possible; il en est de même du trièdre cherché.

Le problème a deux solutions symétriques, car deux trièdres qui ont les dièdres égaux sont égaux ou symétriques.

On peut aussi vérifier sur la figure que les conditions énoncées sont suffisantes, par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait pour le premier cas.

POLYÈDRES

Définitions. — On appelle *polyèdre* un volume limité par des plans. Ces plans forment les *faces* du polyèdre; l'intersection d'une face avec une face contiguë est une *arête* du polyèdre. Les extrémités des arêtes sont les *sommets*.

Détermination des polyèdres. — Un polyèdre est déterminé, en géométrie descriptive, lorsqu'on connaît les projections de ses sommets.

La définition géométrique du polyèdre peut quelquefois permettre de le déterminer, connaissant une partie seulement de ses éléments.

C'est ce qui arrive, en particulier, pour les *polyèdres réguliers*, pour lesquels toutes les faces sont égales, tous les angles polyèdres égaux, et qui jouissent de la propriété d'être inscriptibles et circonscriptibles à une sphère.

Nous en donnerons quelques exemples, sans pourtant traiter à fond la question, qui est plutôt du domaine de la géométrie pure.

Idée de la représentation des polyèdres. — Un polyèdre est représenté, en géométrie descriptive, par les projections de ses arêtes limitées aux

sommets; on a soin de distinguer les arêtes vues des arêtes cachées pour un observateur placé à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan de projection.

L'usage, comme nous l'avons dit, est de représenter les parties cachées en points ronds, les parties vues étant figurées par un trait plein continu.

Il importe, dès le début, de pouvoir se rendre compte des parties vues et cachées sur les projections. La représentation, qu'on doit chercher à se faire, du corps tel qu'il est dans l'espace, simplifie beaucoup le travail, mais il est nécessaire de vérifier, pour un point au moins, qu'on ne s'est pas fait une idée fausse de la situation du corps dans l'espace.

Pour cela, imaginons un rayon venant de l'œil de l'observateur, qui regarde le plan horizontal, par exemple.

Ce rayon est une verticale qui rencontre le polyèdre en un certain nombre de points. Supposons-en deux A et B. Il est aisé de voir, soit par une projection verticale auxiliaire, soit par la cote des points, lequel des deux points est le plus haut. Soit A ce point; il sera vu ainsi que la face dans laquelle il se trouve, jusqu'à la rencontre avec une autre face. Au contraire, le point B et la région qui l'environne seront cachés.

Ce procédé exige qu'on sache déterminer l'intersection d'une droite avec un polyèdre.

Intersection d'une droite et d'un polyèdre. — La méthode générale consiste à couper par un plan passant par la droite ; ce plan coupe le polyèdre suivant un polygone formé par les droites d'intersection du plan auxiliaire avec les faces successives qu'il rencontre, ou bien dont les sommets sont les

points d'intersection des arêtes avec le plan auxiliaire ; on prend les points de rencontre de la droite avec ce polygone ; ce sont les points d'intersection de la droite et du polyèdre.

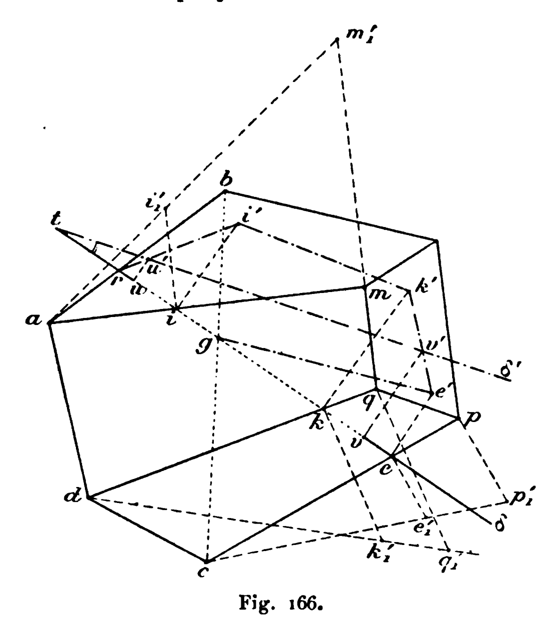


Fig. 166.

Le choix du plan auxiliaire varie avec le genre du polyèdre et la disposition de l'épure.

Soit, par exemple, un polyèdre quelconque ayant une face *abcd* dans le plan horizontal : les points *m*, *n*, *p*, *q* ont des cotes données, telles que ces quatre points soient dans un même plan (fig. 166).

Cherchons l'intersection du polyèdre avec une droite δ donnée par sa trace t_0 et l'angle qu'elle fait avec le plan de comparaison.

Coupons par le plan vertical *t*δ et rabattons-le sur le plan de comparaison.

La droite est rabattue suivant $t\delta$ faisant l'angle donné avec $t\delta$.

Le polygone *rike* déterminé dans le polyèdre est rabattu en $ri'k'e'$; nous avons déterminé la cote des points projetés en i et k par les droites *am* et *dg* auxquelles ils appartiennent. $t\delta'$ rencontre ce polygone en u' et v' projetés sur δ en u et v.

Ce sont les points d'intersection cherchés.

Intersection d'une droite et d'une pyramide. — Dans ce cas, il est souvent avantageux d'employer la projection centrale, S étant centre de projection.

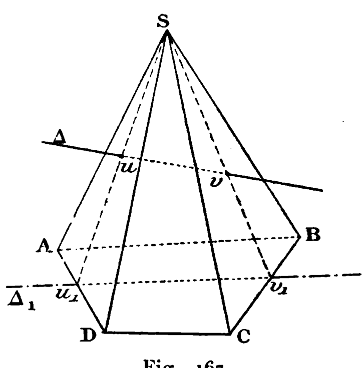


Fig. 167.

La section par un plan quelconque passant par Δ sera projetée suivant ABCD (fig. 167) ; la droite Δ est projetée suivant Δ_1, qui rencontre la base en u_1 et v_1 ; ces points sont les projections coniques des points cherchés U et V sur Δ. On obtient u et v par l'intersection de SU_1 et SV_1 avec Δ.

Soit P le plan de la base donné par son échelle de pente ; la base est projetée en *abcd* (fig. 168).

S est la projection du sommet, de cote 10, IK la droite dont on demande l'intersection avec la pyramide.

Projetons la droite IK sur le plan ABCD, le point S étant le centre de projection ; c'est-à-dire faisons passer par S et IK un plan et cherchons son intersection avec le plan ABCD.

Prenons sur iS le point p de cote 8 ; Kp est l'horizontale de cote 8.

L'intersection cherchée est $i_1 I_1$ qui rencontre le polygone *abcd* en u_1 et v_1 relevés par Su_1 et Sv_1 en u et v sur iK ; u et v sont les points d'intersection cherchés.

Intersection d'une droite et d'un prisme. — Dans le cas d'un prisme, on applique la même méthode ; le

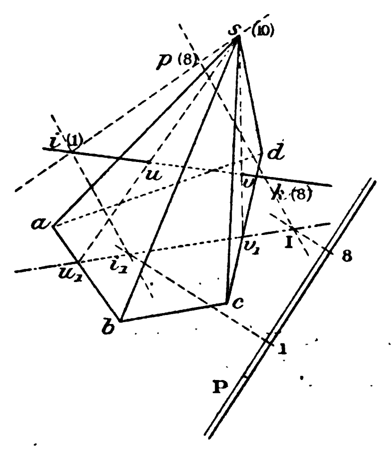


Fig. 168.

point S étant à l'infini dans la direction des arêtes, la projection centrale devient une projection cylindrique.

On mène donc par la droite Δ un plan parallèle aux arêtes ; on prend son intersection $u_1 v_1$ avec le plan de la base choisie.

Les points u_1, v_1 relevés par des parallèles aux arêtes en u et v sur Δ sont les points cherchés.

Supposons le plan de la base P donné par son échelle de pente (fig. 169), la base par sa projection *abcd*, la droite Δ par sa projection δ graduée. Enfin, on donne une arête g. Par le point α (2) de Δ on mène une parallèle aux arêtes et on détermine l'hori-

zontale 3 du plan déterminé par cette droite et Δ ; c'est *h* tel que $\alpha\beta =$ l'intervalle de *g*. Ce plan coupe

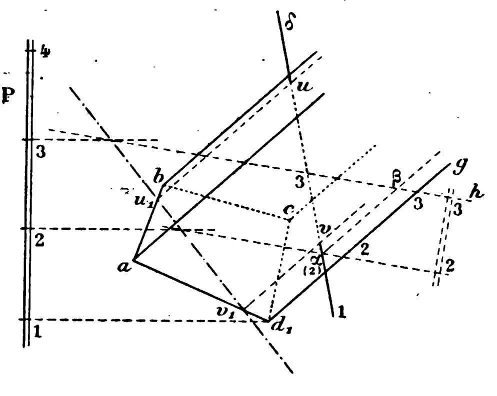


Fig. 169.

le plan de la base suivant une droite qui rencontre la base en u_1 et v_1. Les points *u* et *v*, sur des parallèles aux arêtes, sont les points cherchés.

Représentation des polyèdres. — Nous allons montrer sur un exemple comment on distingue les parties vues des parties cachées, pour un observateur placé à l'infini dans la direction des projetantes. Nous y reviendrons dans les exemples d'épures traités plus loin. Soit un prisme quadrangulaire :

$$abcd \quad \alpha\beta\gamma\delta$$

donné par sa projection (fig. 170). Nous pouvons tracer en traits pleins tout le contour polygonal extérieur que rien ne peut cacher, c'est-à-dire $ab\beta\gamma\delta da$; à ce moment, si l'on ne tient pas compte des cotes, il y a deux manières de voir le prisme ; pour reconnaître quelle est celle qui convient, étudions les lignes

qui se croisent en p; ces lignes $a\alpha$ et bc ne se rencontrent pas dans l'espace; la verticale de p rencontrera l'une avant l'autre, ce qui détermine la visibilité; ainsi, dans la figure nous avons supposé que le point de $a\alpha$ projeté en p avait une cote inférieure à celle du point de bc projeté en p; $c\gamma$ et cd sont vues comme aboutissant à c, qui est vu.

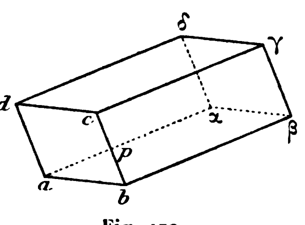


Fig. 170.

Tétraèdre régulier. — Le tétraèdre régulier est le solide compris entre quatre faces égales, formées de triangles équilatéraux.

Les angles trièdres en S, A, B, C sont égaux et toutes les arêtes sont égales (fig 171).

Les trois plans bissecteurs intérieurs des dièdres du trièdre ayant pour sommet S se coupent suivant une droite SΔ qui est la hauteur abaissée du sommet S et en même temps l'intersection des plans bissecteurs intérieurs des faces ASB, BSC, CSA; il en est de même pour les droites $A\Delta_1$, $B\Delta_2$, $C\Delta_3$, relatives aux trièdres de sommets A, B, C.

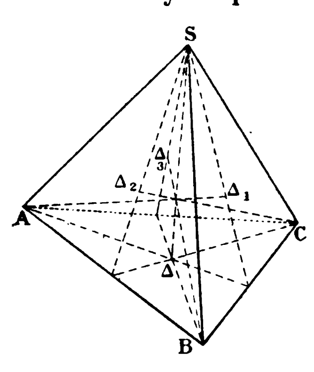


Fig. 171.

De plus, ces quatre droites se coupent en un même point, qui est le centre des sphères inscrites et circonscrites.

Construire un tétraèdre, connaissant une face. — Plaçons d'abord cette face sur le plan horizontal.

Soit ABC cette face, qui est un triangle équilatéral.

Le quatrième sommet S sera projeté en *s*, point de concours des hauteurs et en même temps des médianes et des bissectrices du triangle ABC (fig. 172).

Pour avoir sa cote, rabattons la face ASC autour de AC sur le plan horizontal; elle se rabat suivant le triangle ABC, et la cote cherchée est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont σB est l'hypoténuse et Sσ l'un des côtés. Ce triangle est construit en SσS'. SS' est la cote du sommet.

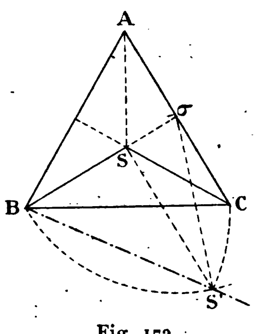


Fig. 172.

On peut encore construire cette cote comme étant le côté d'un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse SB et un côté *s*B ; la cote est ainsi de même construite en SS'.

Application. — Soit une face contenue dans un plan P. On demande de construire sur cette face un tétraèdre régulier dont le sommet soit au-dessous du plan P.

Soit *ab* un côté de la face située dans le plan P (fig. 173).

Pour construire le triangle équilatéral de côté AB, rabattons le plan P autour de l'horizontale du point *b* sur le plan horizontal de cote 6 ; *b* reste fixe ; *c* est rabattu en c_1.

Construisons le triangle équilatéral a_1bc_1 dont un des côtés est bc_1.

La projection du sommet S du tétraèdre sur le

plan ABC est rabattue en σ_1, point de concours des hauteurs, et la distance de S au plan ABC est $\sigma_1 S_1$ obtenue comme nous l'avons dit précédemment, et comme la figure l'indique.

σ_1 est relevé en σ par homologie. Pour avoir S, il faut élever au point σ une perpendiculaire au plan P et prendre sur cette perpendiculaire une longueur $\sigma_1 S_1$ au-dessous du plan P.

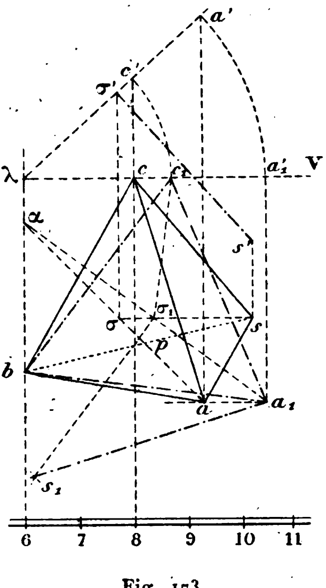


Fig. 173.

La perpendiculaire au plan en σ est projetée suivant $\sigma\sigma_1$; projetons sur le plan vertical V que nous rabattons sur le plan horizontal de cote 6. Le point σ est projeté en σ'.

Menons la perpendiculaire à $\lambda\sigma'$, trace du plan ABC, et prenons $\sigma' S' = \sigma_1 S_1$; S' doit être pris du côté indiqué sur la figure pour que S soit au-dessous du plan.

S' est projeté en *s*; nous avons les quatre sommets *a*, *b*, *c*, *s* du tétraèdre.

Pour le représenter, traçons d'abord le contour extérieur *sabcs* sûrement vu ; puis remarquons que la verticale de *p* remontre *sb* d'abord, puis *ac* ; donc *ac* est vue, le reste s'ensuit.

Projections d'un cube. — Le cube est un solide compris entre six faces égales qui sont des carrés. Les angles aux sommets sont des trièdres trirec-

tangles. Les diagonales 1-7, 2-8, 3-5, 4-6, sont égales et concourent au milieu des droites qui joignent les centres des carrés opposés. Ce point de concours est le centre des sphères inscrite et circonscrite (fig. 174).

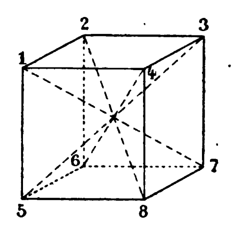


Fig. 174.

Les angles que font les arêtes avec une diagonale sont égaux. Il en est de même des angles que font les faces du cube avec une diagonale.

Projections d'un cube dont on donne le plan d'une face et une arête dans ce plan. — Soit un plan P donné par son échelle de pente ; menons *bt* dans le plan et prenons un point *a* sur cette droite ; *ab* étant la projection d'une arête de la face située dans le plan P, on demande de construire sur cette face un cube situé au-dessus du plan P (figure 175).

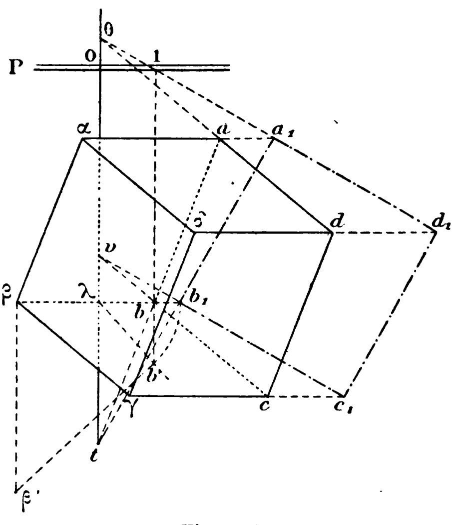


Fig. 175.

Rabattons le plan autour de sa trace sur le plan de comparaison ; b est rabattu en b_1 et a en a_1 ; sur a_1b_1 construisons le carré $a_1b_1c_1d_1$; il est projeté en *abcd* suivant un parallélogramme.

Menons au point b une perpendiculaire au plan P ; elle est projetée suivant $b\beta$ perpendiculaire à P ; rabattons le plan projetant cette droite sur le plan de comparaison ; le rabattement de b est déjà marqué en b' ; menons en b' la perpendiculaire $b'\beta'$ à $\lambda b'$, qui est une droite du plan P ; en prenant $b'\beta'$, du côté indiqué, au-dessus du plan, égale à la longueur a_1b_1 d'une arête, on a en β', projeté en β, un sommet du cube. Pour avoir les autres sommets on mène $\beta\gamma$ parallèle à bc et $\beta\alpha$ parallèle à ba. La face superieure est $\alpha\beta\gamma\delta$. La visibilité est déterminée comme précédemment.

Projection d'un cube sur un plan perpendiculaire à une diagonale. — Commençons par construire la diagonale du cube, connaissant son arête.

C'est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés est l'arête et l'autre la diagonale d'une face. Cette dernière est elle-même l'hypothénuse d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés sont égaux à l'arête.

mp étant l'arête, pq est la diagonale d'une face et pr est la diagonale du cube ($mr = pq$).

D'après ce que nous avons vu, les arêtes qui aboutissent aux sommets d'une diagonale sont également inclinées sur cette diagonale ; les plans des faces font aussi le même angle avec la diagonale ; donc les arêtes se projetteront suivant des longueurs égales (fig. 176).

Les sommets autres que b et δ sont donc en projection horizontale sur la circonférence décrite de b comme centre avec un rayon égal à la projection d'une arête.

Le polygone régulier inscrit dans cette circonfé-

rence a son côté égal au rayon ; c'est donc un *hexagone*.

Si nous prenons un plan vertical V parallèle à une arête du cube, la section passant par la diagonale

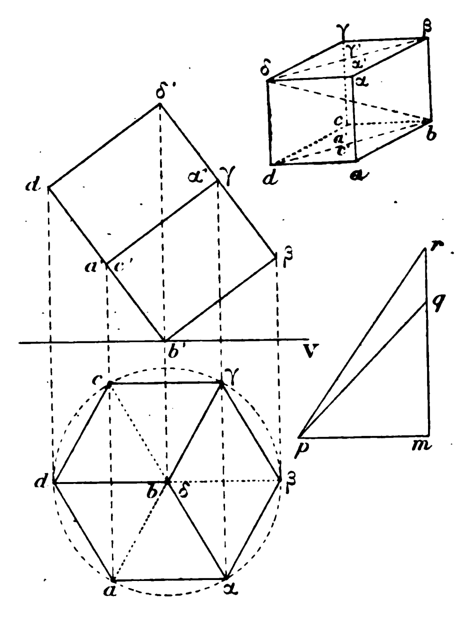


Fig. 176.

verticale et par cette arête se projette verticalement en vraie grandeur suivant un rectangle ; c'est le rectangle $d'\delta'\beta'b'$. — L'un des côtés est l'arête du cube, l'autre la diagonale d'une face ; le triangle $b'd'\delta'$ est donc égal au triangle *mpr*.

Le point α se projette au même point que γ, au milieu de $\delta'\beta'$, puisque la figure $\alpha\beta\gamma\delta$ est un carré dont les diagonales sont rectangulaires et se coupent en leur milieu.

De même, les projections de *a* et *c* sont confon-

dues au milieu de $b'd'$. On voit nettement, sur la projection verticale auxiliaire, que les arêtes aboutissant à δ sont vues.

SECTION PLANE DES POLYÈDRES

La section plane d'un polyèdre est limitée par un polygone ayant pour sommets les points où les arêtes rencontrent le plan sécant.

Section plane d'une pyramide. — Soit une pyramide SABCD (fig. 177) ;

Q, le plan de la base ;

P, le plan sécant ;

π, la trace du plan sécant sur le plan de la base.

Traçons une droite *stu* passant par S.

Menons par le point *t* la droite *tc* qui rencontre π en *l* ; cette droite peut être considérée comme la

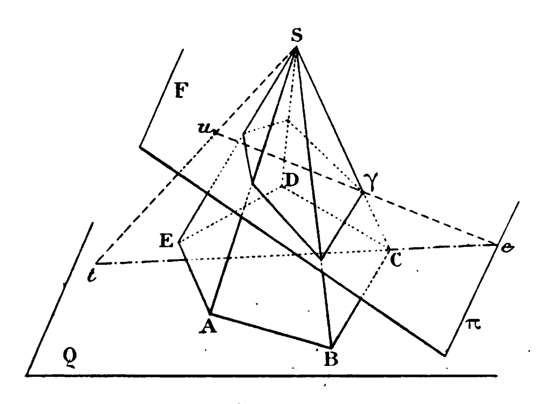


Fig. 177.

trace, sur le plan Q, d'un plan mené par S*t* et l'arête SC ; la trace de ce plan sur le plan P sera *ul*, puisque le point *u* est un point de cette trace et le

point l un second point, comme appartenant à l'intersection π.

lu étant dans un même plan avec SC_{γ} la rencontre en un point γ qui est un sommet de la section par le plan P.

On peut expliquer plus simplement ces constructions à l'aide des propriétés homologiques dont nous nous sommes servis déjà pour les rabattements.

Deux sections planes quelconques d'un angle polyèdre sont homologiques. — En effet, soient P et Q deux sections planes qui déterminent les sections ABC et $\alpha\beta\gamma$ (fig. 178).

Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourent au sommet S de la pyramide. Le point l de rencontre de $\alpha\beta$ avec AB

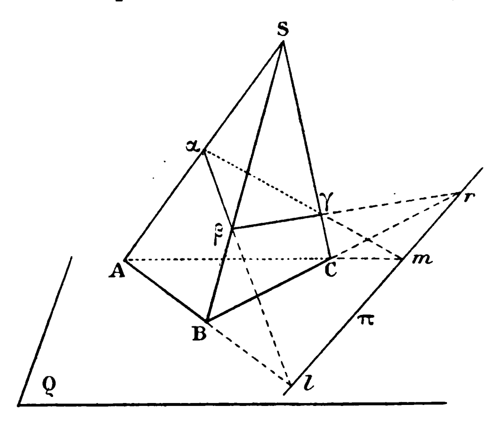


Fig. 178.

appartient à l'intersection des deux plans, qui est la droite π ; de même, le point m de rencontre de $\alpha\gamma$ et AC, et le point r de rencontre de $\beta\gamma$ avec BC sont sur la droite π.

Les droites qui joignent les points correspondants des deux figures sont concourantes au point S, et les

côtés correspondants se coupent sur une droite fixe π.

Donc les deux figures sont homologiques. S est le centre d'homologie, π est l'axe d'homologie.

L'homologie étant une propriété qui se conserve en projection, nous pourrons nous en servir dans les épures.

Supposons d'abord que la droite π ne coupe pas le polygone de base. Revenons à la figure 177.

Menons une droite quelconque par le point S; cette droite rencontre P au point u et Q au point t.

Joignons tc, par exemple : soit l son point de rencontre avec π, la droite homologue de tc dans le plan P sera lu, qui rencontre SC au point γ, homologue de C dans la section plane; γ est le sommet de cette section situé sur l'arête SC. On trouve de même les autres sommets.

Choix de la droite auxiliaire passant par le sommet. — 1° On peut prendre une arête telle que SA et prendre l'intersection de SA avec le plan sécant; A se trouve être confondu avec le point t de la méthode générale; u est l'intersection de SA avec le plan sécant;

2° On peut joindre le point S à un point connu du plan sécant; il n'y a qu'à déterminer la trace t de cette droite sur le plan de la base;

3° On peut mener par S une parallèle à une droite de P, par exemple, ce qui revient à prendre le point u à l'infini dans une direction connue, le point t étant obtenu comme précédemment.

Remarque. — Si la droite π rencontre le polygone de base, les points de rencontre sont des sommets de la section plane; les autres s'obtiennent par homologie.

Épure. — Soit un tétraèdre SABC ayant sa base dans le plan horizontal; un plan P est donné par sa trace π et un point u (3) (fig. 179).

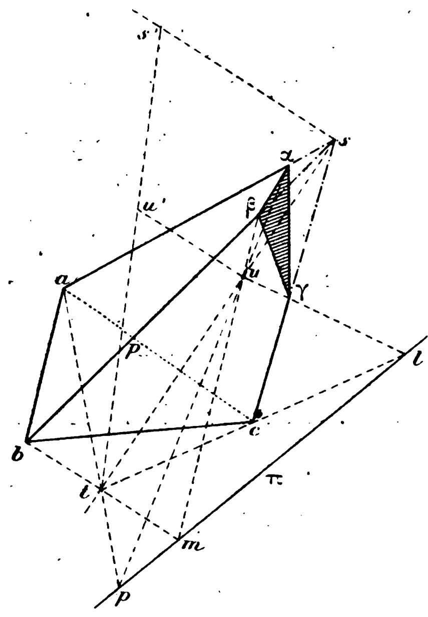


Fig. 179.

Joignons su et déterminons la trace t de Su en rabattant le plan vertical su sur le plan de comparaison.

Joignons tc qui rencontre π en l; lu donne sur sc le sommet γ.

On obient de même les sommets α et β.

La section par le plan P est $\alpha\beta\gamma$.

Nous avons représenté ce qui reste du tétraèdre, lorsqu'on enlève la partie détachée par le plan, du côté du sommet. Nous avons tracé d'abord le contour extérieur $a\,\alpha\gamma cba$; pour déterminer la visibilité, il suffit de voir laquelle des deux arêtes ac ou $b\beta$ est vue; à l'aide de la verticale du point p, on constate aisément que $b\beta$ est au-dessus, c'est-à-dire vue; ac est donc cachée.

Remarque. — Il peut arriver, dans le cas où le plan P est donné d'une manière quelconque, que la droite π soit en dehors des limites de l'épure; dans ce cas, on en est réduit à prendre l'intersection de chaque

arête avec le plan sécant, en employant les méthodes indiquées pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan.

Si l'une des droites, *ta*, par exemple, rencontrait π en dehors des limites de l'épure, on ferait la construction nécessaire pour joindre le point *u* au point de rencontre de deux droites, quand on n'a pas ce point de rencontre.

Application. — ***Couper une pyramide quadrangulaire par un plan tel que la section soit un parallélogramme.*** — Un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles; or, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan en coupe deux autres suivant deux droites parallèles, c'est que ce plan soit parallèle à l'intersection des deux plans.

Le plan cherché doit donc être parallèle aux deux droites d'intersection des faces opposées.

Si donc on coupe la pyramide par un plan parallèle à ces deux droites, il donnera bien dans les faces opposées des droites parallèles, et la section sera un parallélogramme.

Soit *abcd* la base de la pyramide dans le plan horizontal, *s* la projection du sommet. Cherchons un plan passant par α, pris sur *sa* et coupant suivant un parallélogramme (fig. 180).

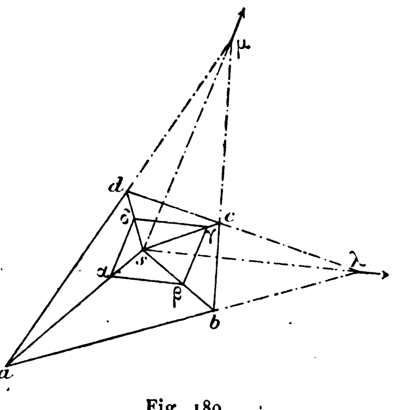


Fig. 180.

Les faces opposées se coupent suivant les droites

$S\lambda$, $S\mu$ qui donnent les directions des côtés du parallélogramme cherché. On l'obtient alors en $\alpha\beta\gamma\delta$.

Remarque. — Ce problème donne la solution du suivant :

Construire un parallélogramme dont les quatre sommets soient sur quatre droites concourantes.

Section plane d'un prisme. — Soit un prisme ayant pour base ABCD dans le plan Q; cherchons la section par le plan P dont l'intersection avec Q est la droite π (fig. 181).

Menons une parallèle quelconque aux arêtes du prisme; soit t son point de rencontre avec Q, u sa trace sur P.

Joignons tA qui rencontre π en m, et considérons cette droite comme la trace d'un plan auxiliaire pas-

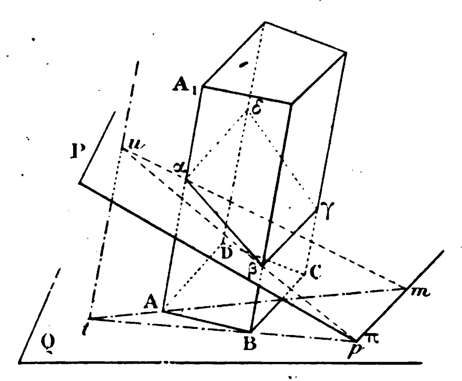


Fig. 181.

sant par tu et l'arête AA_1; la trace de ce plan sur le plan P est mu; mu rencontre AA_1 en α, qui est un des sommets de la section plane.

On obtient de même les sommets sur les autres arêtes du prisme.

On peut, ici encore, justifier plus simplement les constructions à l'aide de l'homologie.

Le prisme est une forme particulière de la pyramide, dont le sommet s'éloigne à l'infini dans une direction qui est celle des arêtes du prisme. En faisant abstraction des bases, c'est-à-dire en prolongeant indéfiniment les arêtes, deux sections planes quelconques sont homologiques; le centre d'homologie est le point à l'infini sur les arêtes du prisme, l'axe d'homologie étant toujours l'intersection des deux plans.

Soit Q le plan de la base ABCD du prisme; P un plan sécant; π sa trace sur le plan Q (fig. 182). Menons une parallèle quelconque aux arêtes du prisme, qui rencontre P et Q en u et t.

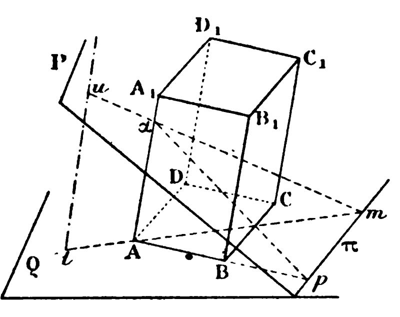


Fig. 182.

L'homologue d'une droite tA est mu dans le plan P; le point α, où mu rencontre l'arête AA, est l'homologue de A dans le plan P; c'est donc un sommet de la section. On obtient de même les autres.

On peut prendre la parallèle qui passe par un point u, connu d'avance dans le plan P. On peut aussi prendre AA_1, et faire pivoter des droites par A dans Q et α dans P.

On peut encore chercher les homologues des côtés AB, BC, CD, directement.

AB, par exemple, rencontre π en p; $p\alpha$ donne le sommet β sur BB_1. Nous allons en donner un exemple.

Section droite d'un prisme. — Soit un prisme donné par sa base *abcd* dans un plan Q, et la direction des arêtes. Ces arêtes font 45° avec le plan horizontal (fig. 183). On demande de limiter ce prisme à un plan de section droite passant par le point de cote 4 sur $d\delta$.

Rabattons le plan projetant $d\delta$ sur le plan horizontal et prenons le point m', m de cote 4.

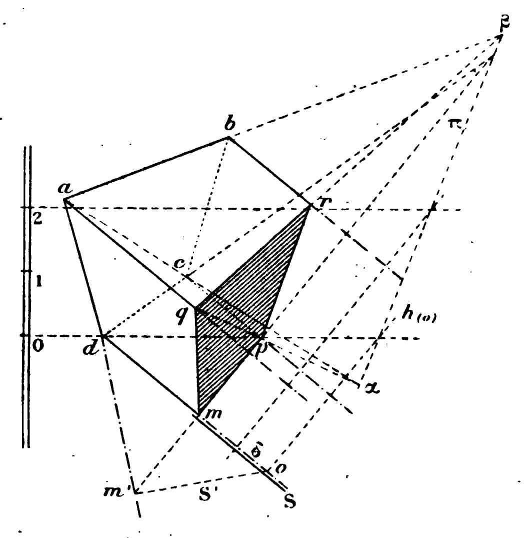


Fig. 183.

La trace du plan de section droite dont s' est la ligne de pente rabattue est h_o; en prenant δm pour échelle de pente du plan de section droite, on la gradue aisément connaissant h_o et la cote 4 du point m.

L'intersection du plan D et du plan S est la droite π.

Appliquons la remarque précédente. Nous connais-

sons m dans le plan sécant sur l'arête partant du point d. Cherchons l'homologue de dc qui rencontre π en γ, c'est la droite γm qui rencontre l'arête du point c en p.

De même, l'homologue de ca est αp, qui donne le point q sur l'arête issue du point a; ab a alors pour homologue βq qui donne le quatrième sommet r.

Nous avons représenté le tronc de prisme compris entre la section droite et le plan de base; l'arête aq, qui est au-dessus, est vue.

Section plane d'un polyèdre quelconque. — On prend l'intersection de chaque arête avec le plan sécant; les points ainsi obtenus sont les sommets de la section. On joint deux à deux les points situés sur les arêtes qui forment une face du polyèdre, on a ainsi les côtés du polygone d'intersection.

On a donc à prendre l'intersection de droites avec un plan; nous ne donnons pas l'épure, qui ne présente aucune particularité.

---

rence a son côté égal au rayon ; c'est donc un *hexagone*.

Si nous prenons un plan vertical V parallèle à une arête du cube, la section passant par la diagonale

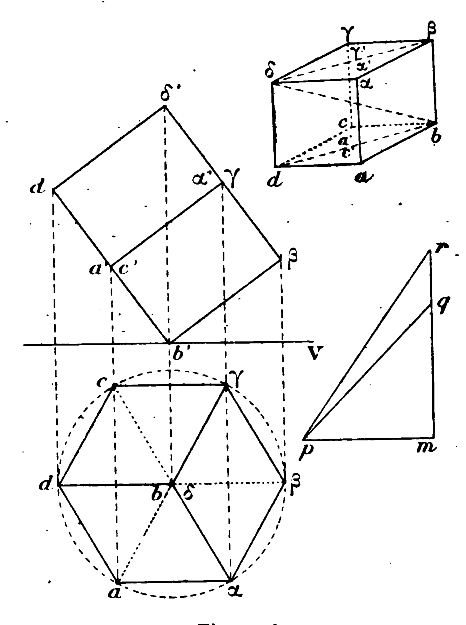


Fig. 176.

verticale et par cette arête se projette verticalement en vraie grandeur suivant un rectangle ; c'est le rectangle $d'\delta'\beta'b'$. — L'un des côtés est l'arête du cube, l'autre la diagonale d'une face ; le triangle $b'd'\delta'$ est donc égal au triangle mpr.

Le point α se projette au même point que γ, au milieu de $\delta'\beta'$, puisque la figure $\alpha\beta\gamma\delta$ est un carré dont les diagonales sont rectangulaires et se coupent en leur milieu.

De même, les projections de a et c sont confon-

dues au milieu de $b'd'$. On voit nettement, sur la projection verticale auxiliaire, que les arêtes aboutissant à δ sont vues.

SECTION PLANE DES POLYÈDRES

La section plane d'un polyèdre est limitée par un polygone ayant pour sommets les points où les arêtes rencontrent le plan sécant.

Section plane d'une pyramide. — Soit une pyramide SABCD (fig. 177) ;

Q, le plan de la base ;

P, le plan sécant ;

π, la trace du plan sécant sur le plan de la base.

Traçons une droite *stu* passant par S.

Menons par le point *t* la droite *tc* qui rencontre π en *l* ; cette droite peut être considérée comme la

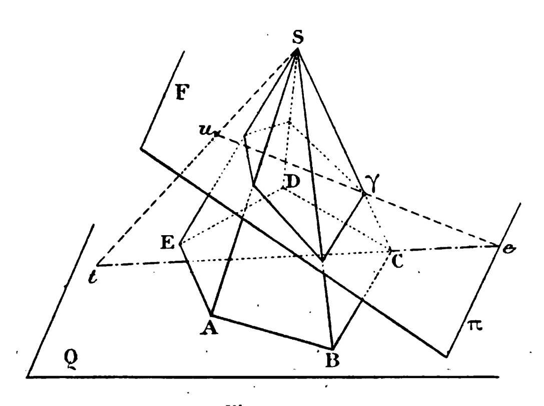


Fig. 177.

trace, sur le plan Q, d'un plan mené par S*t* et l'arête SC ; la trace de ce plan sur le plan P sera *ul*, puisque le point *u* est un point de cette trace et le

au point δ obtenu sur la génératrice de contact S*d*.

Ces plans auxiliaires sont appelés *plans limites*.

Section plane d'un cylindre. — La méthode est la même que pour le cône. On mène une parallèle quelconque aux génératrices du cylindre (fig. 185). Cette droite rencontre le plan de la directrice en un point *t*, et le plan sécant en un point *u*. On fait passer par *tu* des plans auxiliaires; soit *tm* l'un de ces plans, π étant l'intersection de P et de Q; la trace de ce plan auxiliaire sur le plan P est *mu*, qui rencontre les deux génératrices déterminées dans le cylindre en α et β.

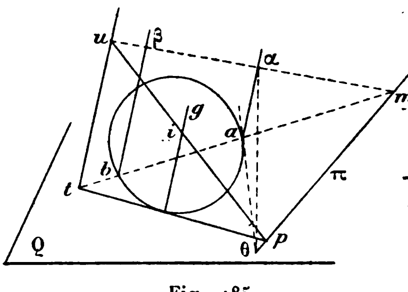


Fig. 185.

La tangente en α, par exemple, est obtenue en menant le plan tangent dont la trace est θ; l'intersection du plan tangent et du plan sécant est $\theta\alpha$; c'est la tangente en α à la section.

En menant un plan-limite, tel que *tp*, tangent au cylindre suivant la génératrice *g*, *pu* est la tangente au point *i* de la section situé sur *g*.

On peut dire plus simplement, au point de vue du langage dans la suite : les sections planes d'un cylindre sont homologiques, les sections par le plan P et le plan Q ont π pour axe d'homologie, le centre d'homologie étant le point à l'infini dans la direction des génératrices.

L'homologue d'une droite *tm* et *mu* qui donne les points α et β, homologues de *a* et de *b*, sur les droites

qui joignent a et b au point à l'infini sur les génératrices, c'est-à-dire au centre d'homologie.

L'homologue de la tangente $a\theta$ est la tangente $\alpha\theta$.

Points de la section plane d'un cône ou d'un cylindre où la tangente est parallèle à une droite donnée du plan sécant. — Ces points seront situés dans les plans tangents à la surface parallèles à la droite donnée. On mène ces plans tangents; les intersections des génératrices de contact avec le plan sécant donnent les points demandés.

Points où la tangente passe par un point donné du plan sécant. — On mène par le point des plans tangents à la surface ; ils contiendront les tangentes passant par le point donné ; les intersections des génératrices de contact avec le plan sécant donnent les points demandés.

Le premier problème est un cas particulier du second ; le point donné est à l'infini dans la direction d'une droite du plan.

Épure. — Section plane d'un cylindre. — *Détermination d'un point et de sa tangente. — Points sur le contour apparent. — Point le plus haut et le plus bas.* — Soit un cylindre dont la directrice est dans un plan horizontal ; on donne la pente des génératrices ; nous avons gradué la génératrice de contour apparent projetée en g (fig. 186).

On coupe ce cylindre par un plan P donné par son échelle de pente ; son intersection avec le plan de la directrice est sa trace π.

Déterminons l'intersection u de la génératrice g avec le plan sécant, comme il a été dit, et coupons par un plan passant par cette droite. Pour cela menons par t une droite quelconque tm, que nous con-

sidérons comme la trace d'un plan par g, mu est la trace de ce plan sur P; mu rencontre en α la génératrice $a\alpha$ déterminée par le plan auxiliaire; α appartient à la projection de la section.

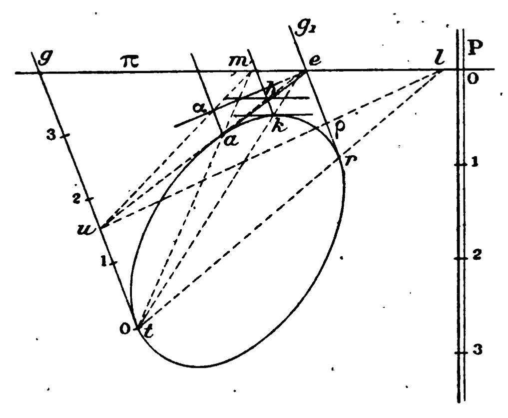


Fig. 186.

Tangente. — $a\theta$ est la trace du plan tangent au cylindre suivant $a\alpha$; elle rencontre la trace du plan sécant en θ; la tangente est $\alpha\theta$.

Points sur les contours apparents. — L'un de ces points est le point u lui-même. Joignons tr qui rencontre π en l; lu donne le point ρ sur g_1; en ce point la tangente est la droite g_1.

Points le plus haut et le plus bas. — Ce sont les points où la tangente est parallèle à une horizontale du plan sécant, π par exemple.

Menons à la directrice des tangentes parallèles à π, soit k un des points de contact; en menant le plan auxiliaire tk, on obtient sur la génératrice du point k le point h, qui est le point le plus bas; en ce point la tangente est parallèle à π.

Branches infinies de la section plane du cône. — *Asymptotes*. — Tous les points d'une section plane sont des points de rencontre des génératrices avec le plan sécant ; il ne pourra y avoir de points à l'infini que s'il y a des génératrices parallèles au plan sécant, puisque les génératrices ne peuvent pas être rejetées à l'infini.

Pour voir s'il y a des génératrices parallèles au plan sécant, on mène par le sommet S du cône un plan parallèle à ce plan ; on prend sa trace *p* sur le plan de la directrice ; si cette trace ne coupe pas la directrice, la section plane n'a pas de points à l'infini ; c'est une courbe fermée.

Supposons que la trace *p* considérée rencontre la directrice en deux points *a* et *b* : ces points, joints au sommet, déterminent deux génératrices *sa*, *sb* du cône parallèle au plan, sur chacune desquelles il y a un point à l'infini appartenant à la section plane (fig. 187).

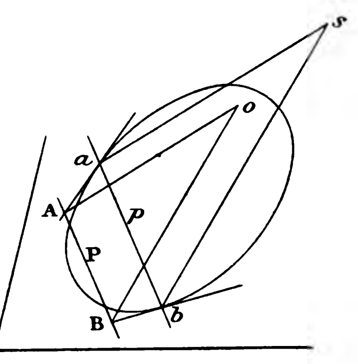


Fig. 187.

Les directions de ces génératrices s'appellent les *directions asymptotiques*.

Dans l'hypothèse que nous avons faite, la section a deux points à l'infini bien déterminés, sur des génératrices connues. La tangente en un point à l'infini s'appelle l'*asymptote*.

Nous connaissons le plan tangent à l'infini, puisqu'il est le même tout le long de la génératrice ; l'asymptote est donc l'intersection du plan tangent suivant

la génératrice de direction asymptotique avec le plan sécant.

Si P est la trace du plan sécant, les droites OA, OB, parallèles à *sa* et *sb*, sont les asymptotes.

Si le plan parallèle au plan sécant est tangent, l'asymptote est rejetée tout entière à l'infini dans la direction de la génératrice de contact ; on obtient ce qu'on appelle une *branche parabolique*.

Épure. — Soit un cône de sommet *s* (2) ayant pour base dans le plan de comparaison un cercle *c* (fig. 188), le cône étant supposé prolongé dans les deux sens.

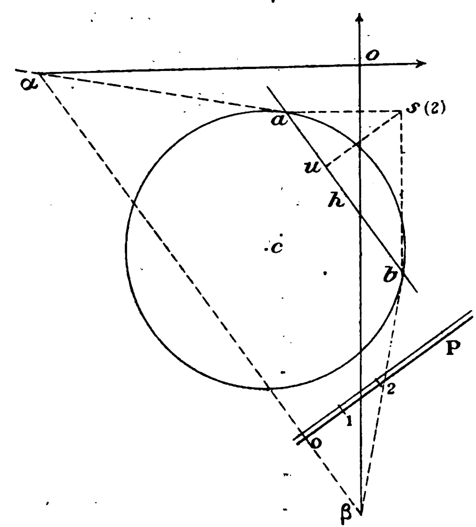


Fig. 188.

Coupons le cône par un plan donné par son échelle de pente P.

Menons par le sommet *s* un plan parallèle au plan P ; sa trace horizontale *h*, obtenue en prenant sur la

perpendiculaire *su* aux horizontales, une longueur *su* égale à deux intervalles, rencontre en *a* et *b* la directrice *c*. Les génératrices *sa* et *sb*, parallèles au plan sécant, sont des directions asymptotiques.

L'asymptote relative à la direction *sa*, tangente au point à l'infini dans cette direction, est l'intersection du plan sécant et du plan tangent au cône le long de *sa*. On en obtient un point en α à l'intersection des horizontales de cote zéro. L'asymptote est la parallèle à *sa* menée par α. On opère de même pour la direction *sb*; on obtient en *o* le centre de l'hyperbole projection de l'intersection.

Branches infinies de la section plane d'un cylindre. — Prenons un cylindre dont la base n'a pas de point à l'infini : un plan sécant ne pourra donner de points à l'infini que s'il est parallèle aux génératrices ; dans ce cas, le plan coupe le cylindre suivant des génératrices.

Pour que la section ait des points à l'infini, il faut donc que la directrice du cylindre soit à branches infinies, c'est-à-dire qu'il y ait des génératrices du cylindre rejetées à l'infini.

Soit, par exemple, un cylindre ayant pour base dans le plan Q une hyperbole, et P un plan sécant.

Menons la droite *tu* parallèle aux génératrices, *t* et *u* étant les intersections de cette droite avec Q et P (fig. 189).

Si nous coupons, suivant la méthode générale, par un plan de traces *tm* sur Q et *mu* sur P, nous obtenons deux génératrices $c\gamma$ et $c_1\gamma_1$, à distance finie, et deux points γ et γ_1, de la section, comme si le cylindre était fermé.

Coupons le plan auxiliaire dont la trace est *tp*,

parallèle à l'asymptote OA de l'hyperbole directrice ; la trace de ce plan sur P est *pu*.

Le cylindre est coupé par le plan auxiliaire suivant une génératrice $a\alpha$ à distance finie et une autre à l'infini. On obtient ainsi, au lieu de deux points γ et γ_1,

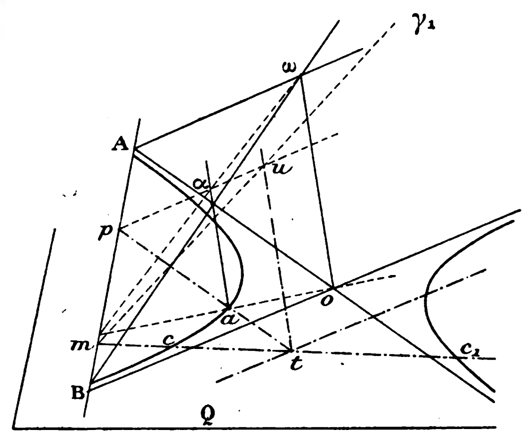


Fig. 189.

sur la droite *mu*, un seul point α sur *pu*, l'autre étant rejeté à l'infini.

pu est donc une direction dans laquelle il y a un point à l'infini de la section ; c'est une *direction asymptotique* de la section.

L'asymptote à la branche de courbe correspondante est la tangente au point à l'infini, c'est-à-dire l'intersection du plan tangent suivant la génératrice à l'infini et du plan sécant. Un plan tangent suivant une génératrice quelconque est le plan mené par la tangente à la directrice et la génératrice ; dans le cas qui nous occupe, la tangente à la directrice à l'infini est l'asymptote OA ; le plan tangent est donc le plan mené par OA parallèlement aux génératrices.

Un tel plan s'appelle *plan asymptote*. Son intersection avec P donne l'asymptote.

Menons par O une parallèle aux génératrices qui rencontre P en ω.

L'asymptote est la parallèle à la direction asymptotique *pu* menée par ω.

Comme vérification, elle doit passer par le point où OA rencontre la trace π du plan P.

En coupant par un plan auxiliaire dont la trace est parallèle à OB, on obtient une deuxième direction asymptotique dans le plan P ; l'asymptote est l'intersection avec P du plan mené par OB, parallèlement aux génératrices.

Elle passe par le point ω et par le point où OB rencontre la trace π du plan P.

En résumé, les asymptotes sont les droites d'intersection du plan sécant avec les plans menés par les asymptotes de la directrice parallèlement aux génératrices (plans asymptotes).

SECTIONS PLANES DES CÔNES ET DES CYLINDRES DE RÉVOLUTION ; THÉORÈMES DE DANDELIN.

Cylindre de révolution. — Toute section plane d'un cylindre de révolution est une ellipse, dont les foyers sont les points de contact avec le plan sécant des deux sphères tangentes à ce plan et inscrites dans le cylindre.

Prenons comme plan de projection le plan passant par l'axe du cylindre et perpendiculaire au plan sécant (fig. 190).

Soit P la trace du plan sécant qui est perpendiculaire au plan de projection. Menons les cercles o et o_1 de contour apparent des sphères inscrites dans le

cylindre et tangentes au plan P ; les contacts de ces sphères avec P sont F et F_1. Soit m la projection d'un point M de la section, $m\gamma$ la génératrice qui passe par M, et qui est tangente aux sphères en φ et φ_1.

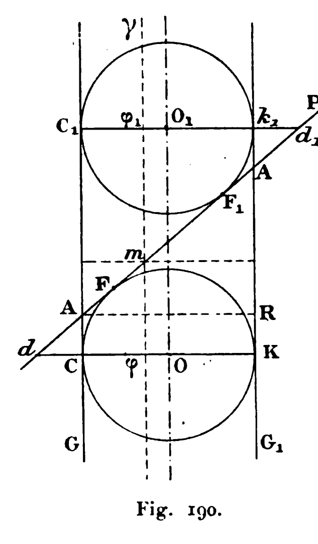


Fig. 190.

La droite MF (les lettres majuscules désignant toujours les points de l'espace) est tangente à la sphère o ; donc $MF = m\varphi$ ($m\varphi$ étant en vraie grandeur), comme tangentes issues du point M à la sphère o. De même $MF_1 = m\varphi_1$, comme tangente à la sphère o_1 ; donc :

$$MF + MF_1 = m\varphi + m\varphi_1 = \varphi\varphi_1.$$

$\varphi\varphi_1$ est une longueur constante quand M varie sur la section ; par suite, le lieu de M est une ellipse dont F et F_1 sont les foyers. Par raison de symétrie, AA_1 est le grand axe de l'ellipse. On a, du reste, $AF_1 = AC_1$; $A_1F_1 = A_1K_1 = AC$, donc $AA_1 = \varphi\varphi_1$.

Directrices. — La directrice correspondant au foyer F est la droite d'intersection du plan P avec la courbe de contact du cylindre et de la sphère o, c'est-à-dire la droite, perpendiculaire au plan de projection, qui est projetée suivant le point d. Il faut démontrer que l'on a : $\frac{MF}{MD} = C^{te}$, MD étant la distance de M à la droite projetée en d.

On a :

$$MF = m\varphi$$
$$MD = md,$$

puisque MD est parallèle au plan de projection comme perpendiculaire à une droite qui est elle-même perpendiculaire à ce plan, de projection ; on a donc :

$$\frac{MF}{MD} = \frac{m\varphi}{md} = \frac{AC}{Ad},$$

rapport qui ne dépend pas de la position du point M, c'est-à-dire = constante.

Cette constante, que l'on sait être l'excentricité e, est inférieure à l'unité ; dans ce cas la courbe est donc bien une ellipse.

De même, la directrice correspondante au foyer F_1 est la droite, perpendiculaire au plan du tableau, projetée suivant le point d_1.

Axes. — La longueur du grand axe est $AA_1 = \varphi\varphi_1 = CC_1$.

Le petit axe a pour longueur le diamètre du cylindre. On le voit en coupant par le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre au milieu de AA_1, qui est le centre de la section.

Distance focale. — Menons par A la perpendiculaire à l'axe du cylindre qui rencontre G_1 au point R ; nous allons montrer que $FF_1 = A_1R$.

En effet :

$$FF_1 = AA_1 - AF - A_1F_1.$$

Or :

$$AA_1 = KK_1 ; \qquad AF = AC = KR ; \qquad A_1F_1 = A_1K_1.$$

Donc :

$$FF_1 = KK_1 - KR - A_1K_1 = A_1R.$$

Placer une ellipse sur un cylindre de révolution donné. — D'après ce que nous avons vu, le petit axe doit être égal au diamètre du cylindre ; soit $2a$ le grand axe. Considérons deux génératrices G et G_1 d'un même plan méridien (fig. 191).

D'un point A pris sur G, avec $2a$ comme rayon, décrivons un cercle qui rencontre G_1 en A_1 et A_2 ; les plans menés par AA_1 ou AA_2 perpendiculairement au plan G_1G_2 couperont le cylindre suivant une ellipse égale à l'ellipse donnée. La distance focale $2c$ est égale à A_1R ou A_2R.

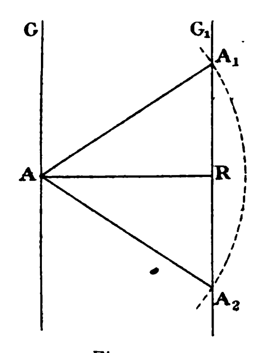


Fig. 191.

Faire passer un cylindre de révolution par une ellipse donnée. — Dans le triangle AA_1R_1 on connaît $AA_1 = 2a$, $AR = 2r$, puisque le rayon du cylindre est toujours égal au demi-petit axe ; on peut construire ce triangle et connaître l'angle en A et, par suite, son complémentaire GAG_1, qui est l'angle que font les génératrices du cylindre avec le plan de l'ellipse donnée. L'axe est la parallèle aux génératrices menée par le centre de l'ellipse donnée.

Epure. — Soit une ellipse située dans le plan horizontal.

Les génératrices G et G_1 se projettent suivant AA_1 ; le diamètre du cylindre étant égal au petit axe (fig. 191), on a son contour apparent en menant les tangentes C et C_1 aux extrémités du petit axe.

Pour avoir l'angle que font les génératrices avec le plan horizontal, construisons sur l'hypothénuse AG_1

le triangle dont nous avons parlé plus haut (AA_1R). Si de A comme centre avec $2c$ comme rayon nous décrivons un arc de cercle, nous obtenons le point R à la rencontre avec le cercle décrit sur AA_1 comme diamètre. L'angle AA_1R est l'angle des génératrices avec le plan horizontal.

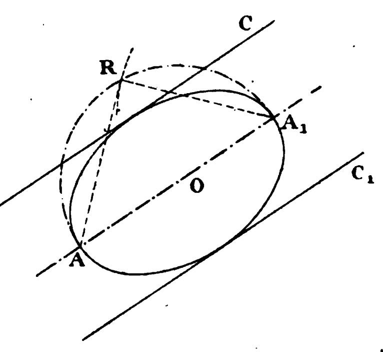


Fig. 192.

Il est évident que les génératrices peuvent faire le même angle avec le plan horizontal en sens inverse ; il y a donc deux solutions, comme pour placer une ellipse sur un cylindre donné.

Cône de révolution. — Section elliptique. — Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de points de la section à l'infini, c'est-à-dire que le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet ne coupe pas le cône.

Prenons pour plan de projection le plan passant par l'axe du cône et perpendiculaire au plan sécant, dont la trace est alors une droite P, telle que la parallèle, menée par S, soit en dehors du contour apparent du cône (fig. 193).

Prenons la sphère o_1 inscrite dans le cône et tangente au plan ; son contour apparent est le cercle inscrit dans le triangle ASA_1 ; son contact avec P est le point F_1. Le cercle o exinscrit au triangle ASA_1 est le contour apparent de la deuxième sphère inscrite dans le cône et tangente au plan P ; le contact est F.

THÉORÈME. — *La section est une ellipse admettant pour foyers les points* F *et* F_1 *et pour directrice correspondante à* F, *par exemple, l'intersection de* P *et du plan* CK *de la courbe de contact du cône avec la sphère* O.

Foyers. — Soit m la projection d'un point de la section. Menons la génératrice qui passe par ce point ; soient φ et φ_1 les projections des points où elle touche les sphères inscrites.

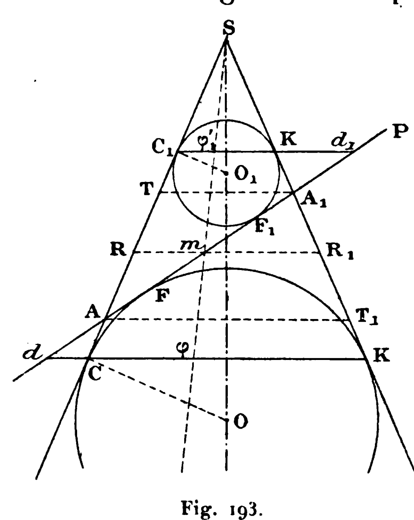


Fig. 193.

On a $M\Phi = MF$ comme tangentes issues d'un même point à une sphère.

Or, $M\Phi$, vraie grandeur de $m\varphi$, est égale à KR_1 (distance constante des deux cercles RR_1 et CK comptée sur une génératrice). De même, la vraie grandeur de $m\varphi_1$ est C_1R_1, et l'on a, d'autre part, $M\Phi_1 = MF$.

Donc $MF + MF_1 = M\Phi + M\Phi_1 = KR_1 + R_1K_1 = KK_1$ qui est constant quand M varie sur la section. Cette section est donc une ellipse ayant F et F_1 pour foyers.

Directrices. — Nous allons montrer que la directrice relative à F est la perpendiculaire au plan de projection menée par l'intersection des plans P et KC, c'est-à-dire que $\frac{MF}{MD} = C^{te}$.

Nous venons de voir que $MF = CR$; la distance MD du point M à la verticale est projetée en vraie grandeur suivant md ; nous avons donc à chercher la valeur du rapport $\frac{CR}{md}$.

Les deux triangles semblables AdC et ARm donnent :

$$\frac{AC}{Ad} = \frac{AR}{Am} = \frac{AC + AR}{Ad + Am} = \frac{RC}{md}.$$

Donc $\frac{RC}{md} = \frac{AC}{Ad}$, qui ne dépend pas de la position de M.

De même, la perpendiculaire menée au plan de projection par d_1 est la directrice relative au foyer F_1.

Distance focale. — D'après ce que nous venons de voir, on a $MF + MF_1 = 2a = AA_1 = KK_1$.

Or, $FF_1 = AA_1 - AF - A_1F_1$ et comme $AF = AC = KT_1$ et $A_1F_1 = A_1K_1$,

$$FF_1 = KK_1 - A_1K_1 - KT_1 = A_1T_1 = AT.$$

Placer une ellipse donnée sur un cône de révolution donnée. — Dans le triangle AA_1T on connaît $AA_1 = 2a$ et $AT = 2c$, qui sont donnés avec l'ellipse ; on connaît l'angle en T, qui est égal à $\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$, θ étant l'angle au sommet du cône donné (fig. 194).

Sur une parallèle à SC, prenons $AT = 2c$. Menons T_1A_1 perpendiculaire à l'axe du cône, et du point A comme centre avec $2a$ comme rayon, traçons un arc de cercle qui donne le point A_1 ; au milieu de T_1A_1, élevons une perpendiculaire qui rencontre T_1A en S.

Il n'y a plus qu'à reporter la figure ainsi construite

sur le contour apparent du cône donné, en prenant des longueurs égales à SA, SA_1.

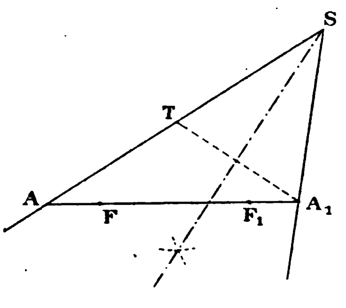


Fig. 194.

Le plan P, qui a pour trace AA_1 sur le plan de la figure, coupera le cône suivant une ellipse égale à l'ellipse donnée.

Il y a évidemment deux solutions symétriques par rapport à l'axe du cône. Le problème est toujours possible, puisque $2a$ étant $> 2c$, on pourra toujours construire le triangle.

Lieu des sommets des cônes de révolution contenant une ellipse donnée. — Prenons comme plan de projection un plan perpendiculaire au plan P de l'ellipse donnée (fig. 195).

On sait que le sommet du cône se trouve dans ce plan.

Soit S le sommet de l'un de ces cônes.

Menons A_1T perpendiculaire à l'axe. AT, qui est la distance focale $2c$ de l'ellipse, est une constante.

On a : $SA - SA_1 = AT$ $=$ constante.

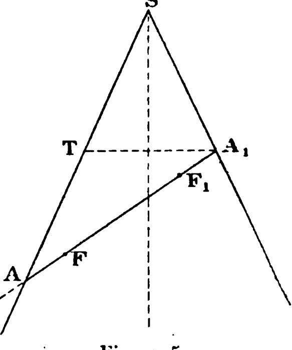


Fig. 195.

Le lieu du point S est donc une hyperbole, admettant pour foyers les points A et A_1, puisque $AT = FF_1$, FF_1 est la longueur de l'axe de l'hyperbole ; F et F_1 sont les sommets de cette hyperbole. Elle est appelée la *focale* de l'ellipse.

Remarque. — Si l'on veut faire passer un cylindre par l'ellipse donnée, il faut prendre les points à l'infini de l'hyperbole que nous venons de trouver ; les directions asymptotiques de cette hyperbole donnent deux directions possibles pour les génératrices du cylindre ; ce sont ces deux directions que nous a données la solution directe ; elles sont également inclinées sur le plan de l'ellipse et se projettent sur ce plan suivant le grand axe.

Section hyperbolique du cône de révolution. — La section présente des points à l'infini si le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet coupe le cône ; dans ce cas, il le coupe suivant deux génératrices qui sont des directions asymptotiques. En prenant toujours le même plan de projection, la trace P du plan sécant rencontre les deux nappes du cône (fig. 196).

Traçons les deux sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan P. Soient CK et C_1K_1 les cercles de contact avec le cône, F et F_1 les points de contact avec le plan sécant.

Soit m la projection d'un point M de la section.

Menons la génératrice SM, projetée en Sm ; φ et φ_1 sont les points de CK et C_1K_1 où la génératrice touche les sphères o et o_1.

On a $MF = M\Phi$ comme tangentes issues de M à la sphère o.

Or, $M\Phi$, vraie grandeur de $m\varphi$, est égale à KR, distance constante des deux cercles RR_1 et CK comptée sur une génératrice et obtenue par rabattement autour de SO.

De même $MF_1 = RC_1$.

Par suite, $MF_1 - MF = RK_1 - KR = KK_1$, qui est une longueur constante.

La section est donc une hyperbole admettant pour foyers F et F_1.

Directrices. — La directrice correspondant au

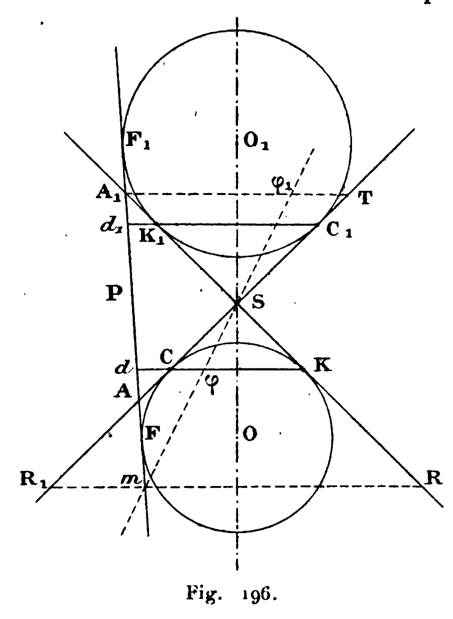


Fig. 196.

foyer F, par exemple, est l'intersection du plan sécant avec le plan CK.

Soit d le point suivant lequel se projette cette droite.

Nous allons montrer que $\frac{MF}{MD} = C^{te}$.

MD, distance du point M à la verticale projetée en d, se projette en vraie grandeur suivant md ; $MF = KR$ d'après ce que nous avons vu ; il faut donc prouver que $\frac{KR}{md} = C^{te}$.

Les triangles semblables CAd et mAR_1 donnent :

$$\frac{mA}{Ad}=\frac{AR_1}{CA}, \quad \frac{mA+Ad}{Ad}=\frac{AR_1+CA}{CA}.$$

D'où $\frac{CR}{md}=\frac{CA}{Ad}$, qui est constant.

De même, la directrice relative au foyer F_1 est la droite projetée suivant d_1.

Distance focale. — On a $AA_1 = C_1C$, puisque ces deux longueurs représentent le grand axe de l'hyperbole.

Or :

$$FF_1 = AA_1 + AF + A_1F_1,$$

et comme :

$$AF = AC \quad \text{et} \quad A_1F_1 = A_1K_1 = C_1T,$$

on a :

$$FF_1 = CC_1 + AC + C_1T = AT.$$

Placer une hyperbole donnée sur un cône de révolution donné. — L'hyperbole étant donnée, dans le triangle ATA_1, nous connaissons :

$AA_1 = 2a$; $AT = 2c$, distance des deux foyers ; l'angle en T est l'angle d'une perpendiculaire à l'axe avec une génératrice, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$, θ étant l'angle au sommet du cône donné (fig. 197).

Prenons une génératrice parallèle à SC_1, par exemple, prise sur le cône donné.

Portons $AT = 2c$; faisons l'angle en T égal à $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$, c'est-à-dire menons une perpendiculaire à

l'axe du cône, puisque nous avons pris TA parallèle à une génératrice.

Prenons sur cette droite le point A_1 tel que $AA_1 = 2a$.

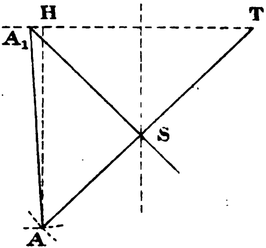


Fig. 197.

Au milieu de TA_1, élevons une perpendiculaire qui donne sur TA le point S ; il ne reste plus qu'à reporter cette figure sur le cône donné.

De même que pour l'ellipse, il y a deux solutions, telles que les traces des plans obtenus soient symétriques par rapport à l'axe du cône.

Condition de possibilité. — Pour que le triangle soit possible, il faut que le cercle décrit de A avec $2a$ comme rayon coupe le côté TA_1, c'est-à-dire :

$$2a > AH \quad \text{ou} \quad 2a > 2c \cos\frac{\theta}{2}, \quad \cos\frac{\theta}{2} < \frac{a}{c}.$$

Or l'angle α des asymptotes est tel que $\tang\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$, ou encore :

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{c}.$$

Il faut donc $\cos\frac{\theta}{2} < \cos\frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire $\theta > \alpha$.

L'angle au sommet du cône doit donc être plus grand que l'angle des asymptotes de l'hyperbole donnée. Si ces angles sont égaux, la trace du plan sécant sur le plan méridien perpendiculaire est parallèle à l'axe du cône.

Lieu des sommets des cônes de révolution contenant une hyperbole donnée. — Soit une hyperbole située dans le plan P perpendiculaire au plan de projection; le lieu du sommet sera une courbe située dans le plan de projection (fig. 198).

Soit S le sommet d'un cône contenant l'hyperbole.

Menons A_1T perpendiculaire à l'axe du cône.

AT est une longueur constante qui représente la distance des deux foyers de l'hyperbole.

On a :

$$SA_1 = ST,$$

par suite :

$$SA + SA_1 = AT = 2c.$$

Le lieu du point S est donc une ellipse admettant pour foyers A et A_1.

Fig. 198.

Les sommets de cette ellipse sont F et F_1, puisque son grand axe doit être égal à $2c$.

C'est la *focale* de l'hyperbole.

On pouvait prévoir que le lieu serait une courbe n'ayant pas de points à l'infini puisqu'un cylindre de révolution, correspondant à un cône dont le sommet est à l'infini, ne peut pas être coupé suivant une hyperbole.

Section parabolique du cône de révolution. — Supposons que le plan parallèle au plan sécant, mené par le sommet, soit tangent au cône.

La section n'a de points à l'infini que dans une

direction, celle de la génératrice de contact; cette génératrice donne une direction asymptotique.

La tangente au point à l'infini sur cette génératrice, c'est-à-dire l'asymptote, est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent au cône suivant cette génératrice.

Par hypothèse, ces deux plans sont parallèles; l'asymptote est donc la droite à l'infini du plan sécant; la section plane est tangente à cette droite à l'infini; elle présente une branche parabolique.

Nous allons démontrer que la section est une parabole admettant pour foyer le point de contact de la sphère inscrite dans le cône et tangente au plan; la directrice correspondante est la droite d'intersection du plan sécant avec le plan du cercle de contact du cône de la sphère.

Prenons encore comme plan de projection le plan perpendiculaire au plan sécant P, mené par l'axe du cône (fig. 199).

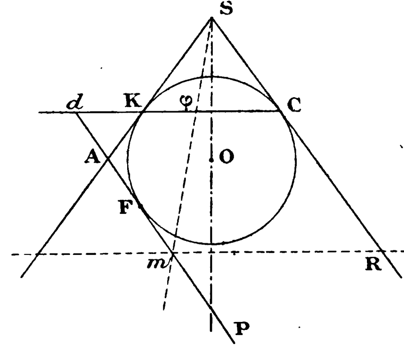


Fig. 199.

La trace de P sera parallèle à une génératrice S*c* située dans le plan de projection.

Soit *m* la projection d'un point de la section. Menons la génératrice qui passe par ce point; soit φ la projection du point de contact de cette génératrice avec la sphère inscrite; *d* le point suivant lequel se projette l'intersection de P avec le plan CK du cercle de contact.

On a $M\Phi = MF$ comme tangentes issues du point M à la sphère.

Or $M\Phi = CR$, distance constante entre les deux cercles CK et mR comptée sur une génératrice; la distance du point M à la droite projetée en d se projette en vraie grandeur suivant md;

$$md = CR \quad \text{et par suite} \quad = MF.$$

La section est donc bien une parabole de foyer F ayant pour directrice la droite d'intersection de P et de CK; le paramètre de la parabole est Fd.

Son sommet est le point A.

Placer une parabole donnée sur un cône donné. — Une parabole est donnée en grandeur, quand on connaît son paramètre (fig. 200.).

Si le plan P se déplace parallèlement à lui-même, le point F, contact de la sphère inscrite, se déplace sur la droite SF, puisque toutes les sphères inscrites sont homothétiques par rapport au point S.

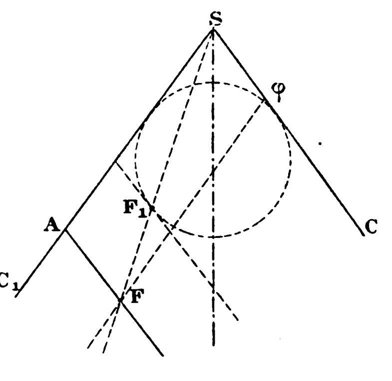


Fig. 200.

On commence par déterminer la droite SF, en inscrivant une sphère et menant une tangente parallèle à Sc, puis joignant le point de contact F_1 au sommet S.

Il suffit alors de prendre, sur SC, une longueur $S\varphi_1 = \frac{p}{2}$ et de mener par ce point une parallèle à Sc_1 qui détermine le point F sur la droite SF.

La trace du plan sécant est la parallèle à Sc menée par F. Le problème est toujours possible.

Parabole-limite de l'ellipse ou de l'hyperbole. — Soit un plan P_1 de trace AA_1 qui donne une section elliptique; si le point A_1 vient en A_2, la section est encore une ellipse; si A_2 s'éloigne à l'infini sur Sc, la section elliptique a pour limite une section parabolique située dans le plan de trace T (fig. 201).

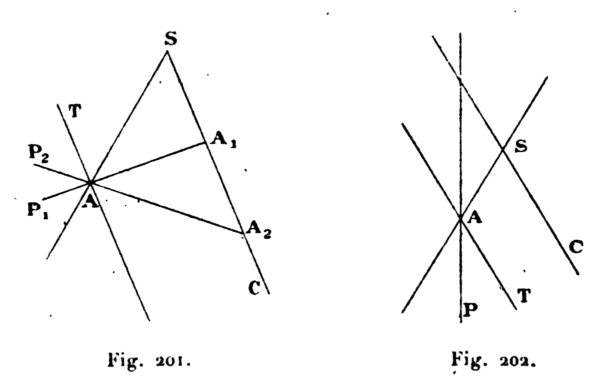


Fig. 201.

Fig. 202.

Considérons maintenant l'hyperbole donnée par un plan P. Si le point A_1 s'éloigne indéfiniment sur SC, à la limite une branche d'hyperbole sera tout entière rejetée à l'infini; la branche restante aura pour limite la parabole située dans le plan de trace T parallèle à SC (fig. 202).

On peut donc considérer la parabole comme la limite d'un arc d'ellipse ou d'un arc d'hyperbole.

Lieu des sommets des cônes de révolution contenant une parabole donnée. — Prenons un plan de projection perpendiculaire au plan P de la parabole dont le sommet est A, le foyer F (fig. 203).

Soit S le sommet d'un cône contenant cette para-

bole. Le point S ne peut se déplacer que dans le plan de projection.

Menons $A\delta_1$ perpendiculaire à l'axe de ce cône, et $\delta_1\delta$ perpendiculaire à AF.

On a :

$$SA = S\delta_1.$$

Le point δ est fixe et $F\delta = AF$; en effet :

$$\beta\delta_1 = F\delta, \quad \text{et d'autre part} \quad \beta\delta_1 = A\alpha = AF.$$

Donc :

$$AF = F\delta.$$

Le point S est à égale distance d'un point fixe A et d'une droite fixe $\delta\delta_1$ perpendiculaire à AF. Le lieu du point S est une parabole ayant A, sommet de la parabole donnée, pour foyer, et pour directrice la perpendiculaire à AF passant par la symétrique du sommet A par rapport au foyer F.

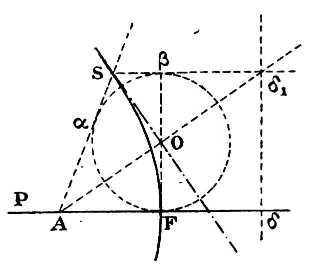


Fig. 203.

Remarque. — La parabole pouvant être considérée comme la limite d'une ellipse ou d'un arc d'hyperbole, le lieu cherché devait être la limite commune du lieu des sommets des cônes contenant une ellipse ou une hyperbole ; on pouvait donc prévoir qu'on trouverait dans ce cas une parabole.

Projection de la section plane d'un cône de révolution sur un plan perpendiculaire à l'axe. — La projection de la section est une conique du même

genre que la section, puisque le nombre des points à l'infini est le même en projection cylindrique que dans l'espace ; la projection admet pour foyer le pied de l'axe du cône, et pour directrice correspondante l'intersection du plan sécant et du plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet.

Prenons comme plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe, et comme plan vertical auxiliaire un plan V mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant P, dont la trace verticale est alors P' (fig. 204).

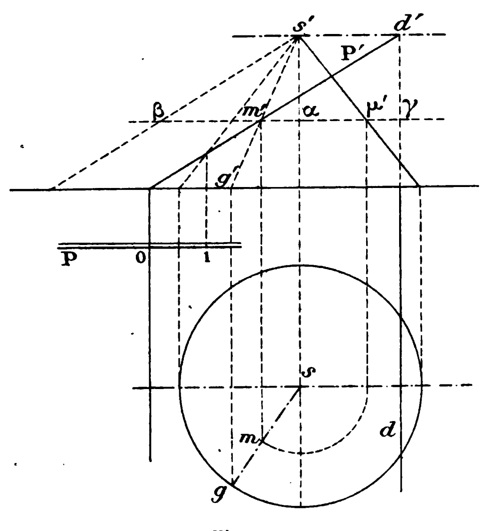


Fig. 204.

Soit (mm') un point de la section, obtenu au moyen de la génératrice $s'g'$, sg; d', d, la droite suivant laquelle P' est coupé par le plan horizontal du sommet.

Nous allons montrer que $\frac{ms}{md} = C^{te}$, ce qui démontrera la proposition énoncée.

Amenons la génératrice SG à être de front; m' vient en μ'.

On a :

$$ms = \alpha\mu' \qquad \text{et} \qquad md = m'\gamma.$$

Menons $s'\beta$ parallèle à P' ; les triangles égaux $\beta s'\alpha$ et $m'd'\gamma$ donnent $m'\gamma = \alpha\beta$. Donc $\frac{ms}{md} = \frac{\alpha\mu'}{\alpha\beta}$, rapport constant, c'est-à-dire indépendant de la position de (mm').

CHANGEMENT DE DIRECTRICE POUR LE CONE ET LE CYLINDRE DE RÉVOLUTION

Il est peu commode, lorsque l'axe n'est pas vertical, de se servir, comme directrice, d'un cercle déterminé dans la surface par un plan perpendiculaire à l'axe. A l'aide d'un plan vertical auxiliaire, on peut déterminer, dans un plan perpendiculaire à ce plan vertical, une ellipse telle que sa projection horizontale soit un cercle. C'est ce qu'on appelle prendre une *directrice de Monge ;* la justification de ce procédé se fait habituellement par des considérations relatives à l'intersection des surfaces du second ordre ; nous allons l'expliquer ici par une méthode purement élémentaire.

Cas du cylindre. — Soit un cylindre de révolution ayant pour axe $o\delta$ graduée ; prenons le plan projetant $o\delta$ comme plan vertical auxiliaire ; $o\delta$ se projette en $o'\delta'$ ($oo' = 5$, $\alpha\alpha = 6$) (fig. 205).

Inscrivons dans le cylindre une sphère o, o' de rayon égal à celui du cylindre ; menons au cercle o' des tangentes verticales qui formeront le contour

genre que la section, puisque le nombre des points à l'infini est le même en projection cylindrique que dans l'espace ; la projection admet pour foyer le pied de l'axe du cône, et pour directrice correspondante l'intersection du plan sécant et du plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet.

Prenons comme plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe, et comme plan vertical auxiliaire un plan V mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant P, dont la trace verticale est alors P′ (fig. 204).

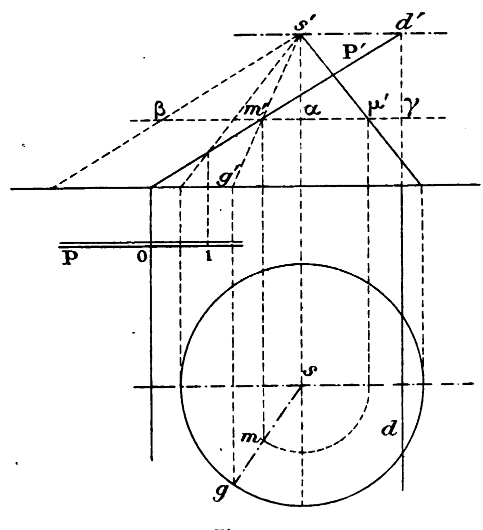


Fig. 204.

Soit (mm') un point de la section, obtenu au moyen de la génératrice $s'g'$, sg ; d', d, la droite suivant laquelle P′ est coupé par le plan horizontal du sommet.

Nous allons montrer que $\frac{ms}{md} = C^{te}$, ce qui démontrera la proposition énoncée.

Amenons la génératrice SG à être de front; m' vient en μ'.

On a :

$$ms = \alpha\mu' \qquad \text{et} \qquad md = m'\gamma.$$

Menons $s'\beta$ parallèle à P′ ; les triangles égaux $\beta s'\alpha$ et $m'd'\gamma$ donnent $m'\gamma = \alpha\beta$. Donc $\frac{ms}{md} = \frac{\alpha\mu'}{\alpha\beta}$, rapport constant, c'est-à-dire indépendant de la position de (mm').

CHANGEMENT DE DIRECTRICE POUR LE CONE ET LE CYLINDRE DE RÉVOLUTION

Il est peu commode, lorsque l'axe n'est pas vertical, de se servir, comme directrice, d'un cercle déterminé dans la surface par un plan perpendiculaire à l'axe. A l'aide d'un plan vertical auxiliaire, on peut déterminer, dans un plan perpendiculaire à ce plan vertical, une ellipse telle que sa projection horizontale soit un cercle. C'est ce qu'on appelle prendre une *directrice de Monge ;* la justification de ce procédé se fait habituellement par des considérations relatives à l'intersection des surfaces du second ordre ; nous allons l'expliquer ici par une méthode purement élémentaire.

Cas du cylindre. — Soit un cylindre de révolution ayant pour axe $o\delta$ graduée ; prenons le plan projetant $o\delta$ comme plan vertical auxiliaire ; $o\delta$ se projette en $o'\delta'$ ($oo' = 5$, $\alpha\alpha = 6$) (fig. 205).

Inscrivons dans le cylindre une sphère o, o' de rayon égal à celui du cylindre ; menons au cercle o' des tangentes verticales qui formeront le contour

axe est A′B′ et pour laquelle la distance des foyers est B′T′, obtenue en menant A′T′ perpendiculaire à l'axe.

L'ellipse déterminée par P′ dans le cylindre verti-

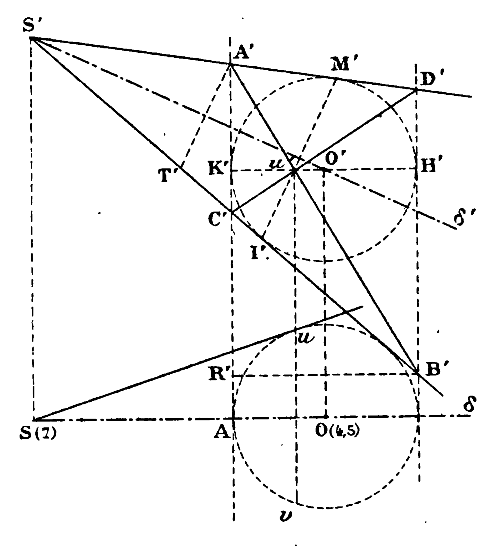


Fig. 206.

cal a également pour grand axe A′B′ et pour distance focale A′R′.

Si nous démontrons que A′R′ = B′T′, les deux ellipses seront confondues. Or :

$$A'R' = A'K' + K'R',$$
$$A'K' = A'M' = T'I',$$
$$K'R' = H'B' = B'I'.$$

Donc :

$$A'R' = T'I' + B'I' = T'B'.$$

L'ellipse du plan P′ tracée sur le cône est donc tout entière sur le cylindre vertical ; elle se projette

horizontalement suivant la trace de ce cylindre, c'est-à-dire suivant un cercle.

Le même raisonnement s'appliquerait à la courbe située dans le plan dont la trace est C'D' ; *un cône et un cylindre circonscrits à une même sphère ont donc en commun deux courbes planes.*

Autre méthode. — On peut dire que les deux projections de la courbe située dans le plan P', considérée comme étant sur le cône et comme étant sur le cylindre, ont en commun les points A et B avec même tangente et les points U et V, projetés en u' situés sur les génératrices de contour apparent horizontal du cône. Ayant quatre points communs et mêmes tangentes en ces points, les deux projections sont confondues.

Remarque. — Les points u et v projetés en u' appartiennent aussi à la projection de la section par le plan de bout C'D' ; donc les deux droites A'B', C'D' se coupent au point u', projection de l'intersection des courbes de contact du cône du cylindre avec la sphère.

Théorème. — *Deux cônes de révolution circonscrits à une même sphère ont en commun deux courbes planes dont les plans passent par la droite d'intersection des plans des courbes de contact.*

Prenons comme plan de projection le plan des deux axes (fig. 207).

Soient AB et CD les droites joignant les points de rencontre des génératrices de contour apparent du cône S et du cône σ.

La section du cône S par le plan vertical AB a pour grand axe HB $= 2a$; A$d = 2c$.

La section du cône S par le même plan a même grand axe et pour distance focale $A\beta = 2c_1$.

Or :

$$A\alpha = AQ + Q\alpha,$$

et comme

$$AQ = AP \quad \text{et} \quad Q\alpha = BT = BR = P\beta,$$

on a :

$$A\alpha = AP + P\beta = A\beta \quad \text{ou} \quad c = c_1.$$

La section par le plan vertical AB, perpendiculaire au plan de projection, est donc une ellipse commune

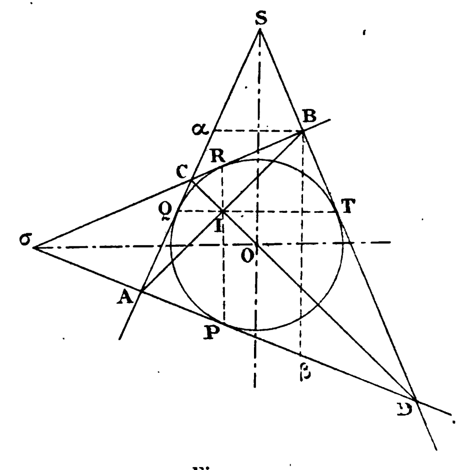


Fig. 207.

aux deux cônes ; on verrait de même que la section par le plan CD est commune aux deux cônes.

Les plans AB et CD se coupent suivant la droite projetée au point I.

Nous allons montrer que I est le point de rencontre

des traces des plans des courbes de contact QT et PR.

Au point de rencontre des deux courbes planes, qui sont projetées en I, les plans tangents aux deux cônes sont déterminés par les tangentes aux deux courbes planes passant en ces points; ces tangentes sont les mêmes; les cônes ont donc même plan tangent en ces points.

Nous savons, d'autre part, que les points où les cônes ont même plan tangent sont donnés par les points de rencontre des cercles de contact avec une sphère inscrite dans les deux cônes.

Donc ces points doivent aussi être projetés en I et les quatre droites AB, CD, QT, PR se coupent en un même point.

Applications. — ***Intersection d'une droite et d'un cylindre de révolution.***

Soit un cylindre de rayon donné, d'axe *od*, *o* étant dans le plan horizontal, *d* ayant la cote 3 et une droite *a* (4), *t* (*o*) dont on demande les points d'intersection avec le cylindre (fig. 208).

Prenons comme plan vertical le plan *od*, en le rabattant sur le plan horizontal.

L'axe est projeté en *od*; la droite donnée en $t'a'$.

Soit P le plan d'une des courbes planes communes à un cylindre vertical et au cylindre donné, P étant la bissectrice de od' et de la verticale. Prenons cette courbe comme directrice; elle est projetée horizontalement suivant le cercle *o*, et verticalement suivant P.

Menons par la droite *at*, projetée en $a't'$ ($\theta a' = 4$) un plan parallèle aux génératrices; sa trace sur le plan P est projetée suivant $u\gamma$, $u'\gamma'$.

La trace du plan sécant est la parallèle à Sc menée par F. Le problème est toujours possible.

Parabole-limite de l'ellipse ou de l'hyperbole. — Soit un plan P_1 de trace AA_1 qui donne une section elliptique ; si le point A_1 vient en A_2, la section est encore une ellipse ; si A_2 s'éloigne à l'infini sur Sc, la section elliptique a pour limite une section parabolique située dans le plan de trace T (fig. 201).

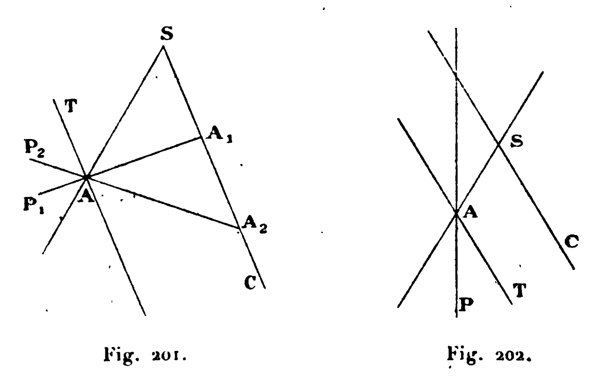


Fig. 201. Fig. 202.

Considérons maintenant l'hyperbole donnée par un plan P. Si le point A_1 s'éloigne indéfiniment sur SC, à la limite une branche d'hyperbole sera tout entière rejetée à l'infini ; la branche restante aura pour limite la parabole située dans le plan de trace T parallèle à SC (fig. 202).

On peut donc considérer la parabole comme la limite d'un arc d'ellipse ou d'un arc d'hyperbole.

Lieu des sommets des cônes de révolution contenant une parabole donnée. — Prenons un plan de projection perpendiculaire au plan P de la parabole dont le sommet est A, le foyer F (fig. 203).

Soit S le sommet d'un cône contenant cette para-

bole. Le point S ne peut se déplacer que dans le plan de projection.

Menons $A\delta_1$ perpendiculaire à l'axe de ce cône, et $\delta_1\delta$ perpendiculaire à AF.

On a :

$$SA = S\delta_1.$$

Le point δ est fixe et $F\delta = AF$; en effet :

$$\beta\delta_1 = F\delta, \quad \text{et d'autre part} \quad \beta\delta_1 = A\alpha = AF.$$

Donc :

$$AF = F\delta.$$

Le point S est à égale distance d'un point fixe A et d'une droite fixe $\delta\delta_1$ perpendiculaire à AF. Le lieu du point S est une parabole ayant A, sommet de la parabole donnée, pour foyer, et pour directrice la perpendiculaire à AF passant par la symétrique du sommet A par rapport au foyer F.

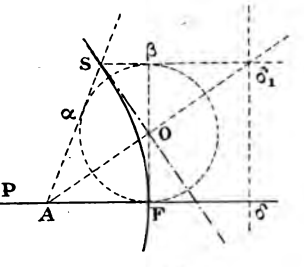


Fig. 203.

Remarque. — La parabole pouvant être considérée comme la limite d'une ellipse ou d'un arc d'hyperbole, le lieu cherché devait être la limite commune du lieu des sommets des cônes contenant une ellipse ou une hyperbole ; on pouvait donc prévoir qu'on trouverait dans ce cas une parabole.

Projection de la section plane d'un cône de révolution sur un plan perpendiculaire à l'axe. — La projection de la section est une conique du même

genre que la section, puisque le nombre des points à l'infini est le même en projection cylindrique que dans l'espace ; la projection admet pour foyer le pied de l'axe du cône, et pour directrice correspondante l'intersection du plan sécant et du plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet.

Prenons comme plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe, et comme plan vertical auxiliaire un plan V mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant P, dont la trace verticale est alors P′ (fig. 204).

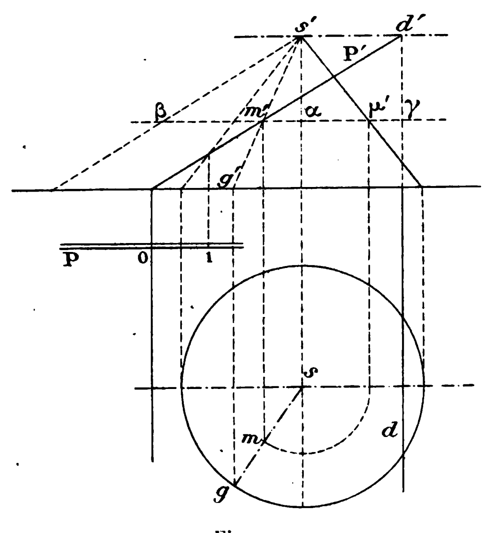


Fig. 204.

Soit (mm') un point de la section, obtenu au moyen de la génératrice $s'g'$, sg ; d', d, la droite suivant laquelle P′ est coupé par le plan horizontal du sommet.

Nous allons montrer que $\frac{ms}{md} = C^{te}$, ce qui démontrera la proposition énoncée.

Amenons la génératrice SG à être de front; m' vient en μ'.

On a :

$$ms = \alpha\mu' \qquad \text{et} \qquad md = m'\gamma.$$

Menons $s'\beta$ parallèle à P′ ; les triangles égaux $\beta s'\alpha$ et $m'd'\gamma$ donnent $m'\gamma = \alpha\beta$. Donc $\frac{ms}{md} = \frac{\alpha\mu'}{\alpha\beta}$, rapport constant, c'est-à-dire indépendant de la position de (mm').

CHANGEMENT DE DIRECTRICE POUR LE CONE ET LE CYLINDRE DE RÉVOLUTION

Il est peu commode, lorsque l'axe n'est pas vertical, de se servir, comme directrice, d'un cercle déterminé dans la surface par un plan perpendiculaire à l'axe. A l'aide d'un plan vertical auxiliaire, on peut déterminer, dans un plan perpendiculaire à ce plan vertical, une ellipse telle que sa projection horizontale soit un cercle. C'est ce qu'on appelle prendre une *directrice de Monge ;* la justification de ce procédé se fait habituellement par des considérations relatives à l'intersection des surfaces du second ordre ; nous allons l'expliquer ici par une méthode purement élémentaire.

Cas du cylindre. — Soit un cylindre de révolution ayant pour axe $o\delta$ graduée ; prenons le plan projetant $o\delta$ comme plan vertical auxiliaire ; $o\delta$ se projette en $o'\delta'$ ($oo' = 5$, $\alpha\alpha = 6$) (fig. 205).

Inscrivons dans le cylindre une sphère o, o' de rayon égal à celui du cylindre ; menons au cercle o' des tangentes verticales qui formeront le contour

c'est-à-dire deux diamètres conjugués de la section.

Les projections seront aussi les diamètres conjugués de la projection, puisque le milieu de la droite se projette en son milieu.

Ces conditions s'appliquent à un cylindre quelconque, de révolution ou non.

Remarque. — Il n'existe pas de plans diamétraux conjugués pour le cône; cela tient à ce que la projection conique ne jouit pas des mêmes propriétés que la projection cylindrique au point de vue de la conservation de la proportionalité des segments. Par exemple, le milieu d'un segment, en projection conique, ne se projette pas au milieu de ce segment, sauf quand le segment est parallèle au plan de projection.

Exemple. — Soit un cylindre donné par son axe $o\delta$ et son rayon (fig. 211).

Cherchons son intersection avec un plan P donné par son échelle de pente.

Prenons comme plan vertical auxiliaire le plan vertical $o\delta$ sur lequel l'axe est projeté en $o\delta'$ (o est le point de cote zéro sur l'axe).

Traçons la sphère inscrite de centre o dont le rayon est égal à celui du cylindre. Imaginons le cylindre vertical circonscrit et prenons pour directrice la courbe située dans le plan de bout D', projetée horizontalement suivant le cercle o. D' est une bissectrice de $o\delta'$ et de la verticale ov'.

L'intersection de D' avec le plan P est projetée horizontalement suivant la droite π, obtenue par l'intersection avec D' de deux horizontales du plan P, cotées 2 et 3.

L'intersection de $o\delta$ avec le plan P, obtenue en coupant par le plan vertical $o\delta$, est le point ω, centre de la section et centre de la projection.

Menons par le point o deux diamètres rectangulaires du cercle op et or; ce sont les traces de deux

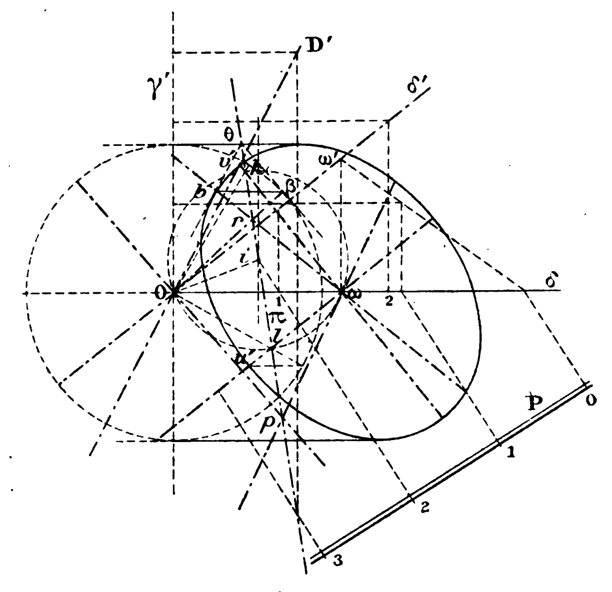


Fig. 211.

plans diamétraux du cylindre sur le plan de la directrice.

Les traces de ces plans sur le plan P sont ωp et ωr, qui sont deux diamètres conjugués de la section, et aussi de sa projection.

Les points a et b sur ces diamètres sont obtenus en prenant l'intersection de ces diamètres avec les génératrices déterminées par les plans auxiliaires op et or.

Tangente. — Le plan tangent au point b a pour

trace sur le plan de la directrice la tangente $p\theta$; θb est la tangente.

Axes. — Si les deux diamètres, tels que ωr et ωp, sont rectangulaires, le quadrilatère $o\omega rp$ est inscriptible; le cercle circonscrit a son centre, d'une part, sur la droite fixe π, d'autre part sur la perpendiculaire au milieu de $o\omega$; ce cercle a son centre au point i et pour rayon io, par exemple. Il rencontre π aux points l et k par lesquels il faut faire passer des plans auxiliaires ol et ok afin d'avoir les diamètres rectangulaires, c'est-à-dire les axes, de la projection; u et v sont deux sommets.

Remarque. — Ce procédé pour la détermination des axes s'applique chaque fois que la directrice est un cercle, ou projetée suivant un cercle.

Section plane du cône de révolution. — Soit un cône de sommet s (3) circonscrit à une sphère dont le centre o est dans le plan horizontal (fig. 212). Un plan sécant est donné par sa trace T et le point m (7).

Si on mène par le sommet s un plan parallèle au plan sécant, ce plan, dont la trace sur le plan vertical sm est $o_1\beta$ et dont la trace horizontale est T_1, ne coupe évidemment pas le cône suivant des génératrices réelles.

($s_1\beta$ a été menée parallèle à $m_1\alpha$, projection verticale de la droite $m\alpha$ du plan donné).

Prenons pour plan vertical auxiliaire le plan de trace so projetant l'axe du cône, qui se projette en $s'o$; la sphère reste fixe; prenons une directrice de Monge, par exemple celle qui est située dans le plan de bout D′, projetée horizontalement suivant le cercle o.

L'intersection du plan sécant avec le plan de cette

directrice est projetée suivant la droite π, obtenue par l'intersection des traces horizontales et par l'intersection avec D' d'une droite $\alpha m, \alpha' m'$ du plan sécant.

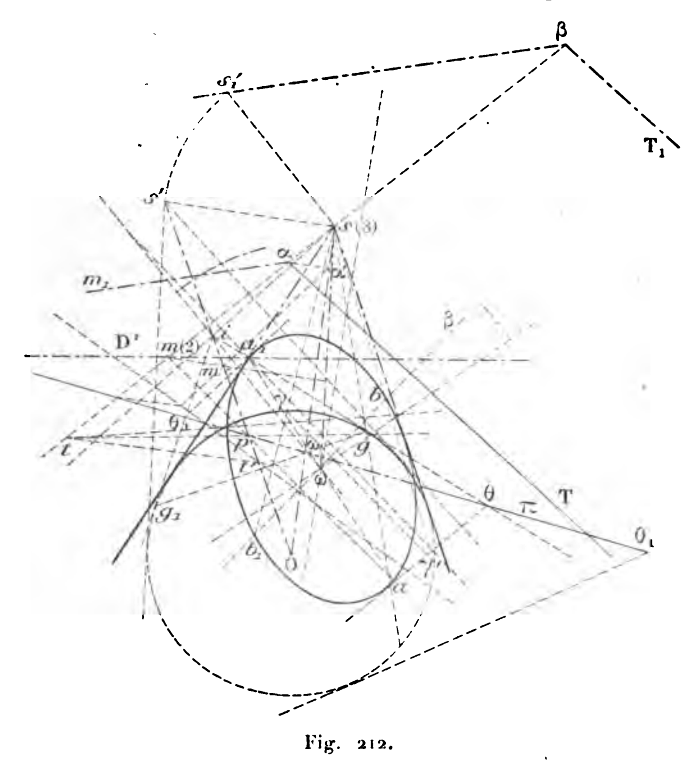


Fig. 212.

Détermination d'un point. — Nous allons faire passer des plans auxiliaires par la droite sm', $s'm'$, qui rencontre le plan de la directrice en $(t't)$.

Soit tp la projection de la trace d'un de ces plans sur le plan de la directrice ; sa trace sur le plan sécant passe par m en projection ; c'est donc la droite pm, qui rencontre la génératrice du point g, par exemple, en un point a appartenant à la section.

Tangente. — La tangente en g au cercle, projection de la directrice, rencontre π en θ ; θa est la tangente au point a.

Points à tangentes parallèles. — Centre. — Diamètres conjugués. — Cherchons le deuxième point où la tangente est parallèle à θa en projection horizontale.

La méthode générale consiste à chercher la droite du plan sécant projetée suivant θa ce qui donne la direction que doit avoir la tangente dans l'espace ; puis à mener au cône les plans tangents parallèles à cette droite ; c'est-à-dire tracer par le sommet une parallèle à la direction trouvée, prendre son intersection avec le plan de la directrice et mener de ce point les tangentes à la directrice.

Dans le cas présent, nous avons choisi à dessein une direction telle qu'on connaisse déjà l'une des tangentes à la directrice, la droite θg.

Si nous menons par s une parallèle à θa, elle rencontre θg en i ; c'est de ce point qu'il faut mener l'autre tangente ig_1 qui rencontre π en θ_1. En menant par θ_1 une parallèle à θa, on obtient a_1 à la rencontre de cette droite avec sg_1.

aa_1 est un diamètre de la section ; le milieu ω de aa_1 est le centre ; en menant par ω la parallèle $\omega\beta$ à tangente θa, on a le diamètre conjugué de aa_1.

On peut alors chercher la droite du plan sécant projetée suivant $\omega\beta$ et prendre son intersection avec le cône, ou bien chercher les points où la tangente à la projection est parallèle à aa_1.

Nous avons employé le premier procédé ; projetons coniquement la droite $\omega\beta$ sur le plan de la directrice D' ; le point ω qui se trouve dans le plan des deux droites sg, sg_1 se projette en ω_1 sur gg_1 et le

point λ est à lui-même sa projection ; $\gamma\omega_1$ coupe la directrice en γ et γ_1, les points b et b_1 sur les génératrices $s\gamma$, $s\gamma_1$ sont les points cherchés.

L'ellipse-projection est déterminée ainsi par deux diamètres conjugués.

Les points sur les contours apparents sont obtenus en faisant passer des plans auxiliaires par t et les points de contact des génératrices de contour apparent avec le cercle o.

Section hyperbolique du cône de révolution. — Supposons que le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet du cône coupe le cône suivant deux génératrices réelles et distinctes ; la section aura deux points à l'infini dans la direction des génératrices trouvées ; on sait que ces génératrices sont appelées directions asymptotiques et que les asymptotes correspondantes sont les tangentes à l'infini, c'est-à-dire les intersections du plan sécant et des plans tangents suivant les génératrices directions asymptotiques.

Nous pouvons déterminer aisément ces asymptotes ; leur point de rencontre est le centre de la section ; l'hyperbole est alors déterminée si l'on en connaît un point.

Détermination des axes. — Les axes de la projection sont les bissectrices des projections des asymptotes ; on a donc immédiatement les axes, connaissant les asymptotes ; pour avoir les sommets sur l'axe réel de l'hyperbole, on cherche la droite du plan sécant qui est projetée suivant cet axe, et on prend l'intersection de cette droite avec le cône.

On peut aussi chercher les points où la tangente est parallèle à la direction de l'axe non transverse. Le

choix du procédé dépend des constructions déjà effectuées. Ces considérations relatives à la section hyperbolique s'appliquent à un cône quelconque ayant pour directrice une conique.

Section parabolique du cône de révolution. — Pour qu'un plan coupe un cône de révolution suivan une parabole, il faut que le plan parallèle mené part le sommet coupe le cône suivant deux génératrices confondues, c'est-à-dire soit tangent au cône.

La génératrice de contact est une direction asymptotique ; l'asymptote, tangente au point à l'infini sur cette génératrice, est l'intersection du plan tangent et du plan sécant, qui sont parallèles ; cette asymptote est donc rejetée à l'infini. La section est une parabole dont l'axe est parallèle à la génératrice de contact.

Axe. — *Sommet.* — *Foyer.* — Pour avoir l'axe de la projection de cette parabole, il suffit de chercher le point de la section où la tangente, en projection, est parallèle à la perpendiculaire à la génératrice de contact, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe de la parabole. Le point ainsi obtenu est le sommet de la parabole.

On cherche un point de la section ; les propriétés géométriques de la parabole permettent alors de la déterminer.

Soit un cône de révolution d'axe so, circonscrit à une sphère de centre o (o). Sur le plan vertical so, s est projeté en s'.

Prenons une directrice de Monge D′ (fig. 213) projetée horizontalement suivant le cercle o (on a un point de D′ à l'intersection du diamètre so avec la polaire de s').

Soit *sg* la projection horizontale d'une génératrice du cône ; le plan tangent le long de cette génératrice est déterminé par SG et la tangente π_1, D' à la directrice.

Coupons par un plan parallèle à ce plan tangent ;

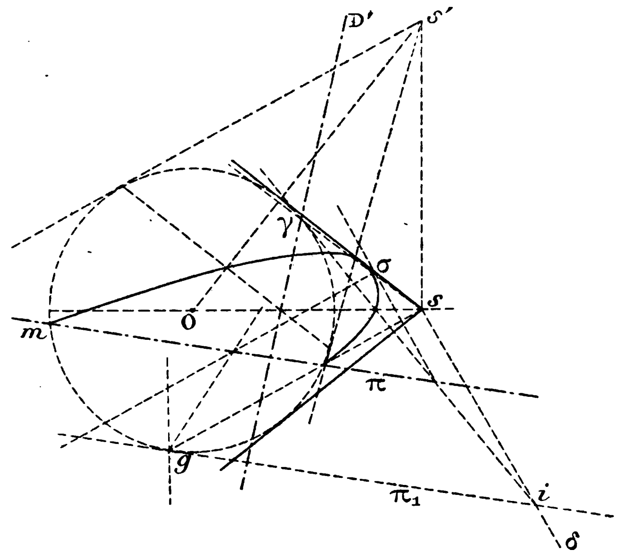


Fig. 213.

son intersection avec le cône est une parabole dont l'axe, en projection horizontale, est dirigé suivant *sg*.

Déterminons le plan sécant par son intersection π, D' avec le plan D' (π est parallèle à π_1) et par la parallèle à SG menée par un point de π, D'.

Pour avoir le sommet de la parabole en projection, cherchons le point où la tangente est perpendiculaire à la direction *sg*.

Menons par *s* la parallèle *s*δ à cette direction, qui rencontre π_1 en *i* ; en menant du point *i* la deuxième tangente au cercle O, on obtient la génératrice *s*γ

dont l'intersection avec le plan sécant donne le sommet cherché.

En effet, il faudrait chercher la droite du plan sécant projetée suivant $s\delta$ et mener au cône les plans tangents parallèles à cette droite, en prenant l'intersection de cette droite avec le plan D' et menant de la projection horizontale de ce point les tangentes au cercle o. Mais une des solutions doit être la tangente π_1 ; il suffit donc de mener seulement $s\delta$ en projection horizontale et de prendre le point i d'intersection de $s\delta$ avec π_1 ; c'est bien de ce point qu'on doit mener l'autre tangente. On peut encore dire que la trace de la droite projetée suivant $s\delta$ et dont la direction est dans le plan sécant, ne peut être que sur π_1 trace sur D' du plan parallèle au plan sécant mené par S.

Comme nous ne nous sommes point encore occupés de la position du plan sécant, on voit que les sommets de toutes les projections des paraboles déterminées par un plan parallèle au plan tangent suivant SG seront sur la génératrice $s\gamma$.

Le plan sécant étant fixé comme nous l'avons dit, il suffit de prendre l'intersection de $s\gamma$ avec ce plan pour obtenir en σ le sommet de la parabole-projection. Le plan tangent dont la trace est $i\gamma$ coupe le plan sécant suivant la droite $b\sigma$ parallèle à $s\delta$. C'est la tangente au sommet, et σ est le sommet ; un point quelconque permet alors de déterminer le foyer de la parabole. On a sur l'épure un point en m.

SECTION ANTIPARALLÈLE D'UN CÔNE OU D'UN CYLINDRE A BASE CIRCULAIRE

Prenons comme plan du tableau le plan mené par la droite so, o étant le centre d'une section circu-

laire, perpendiculairement au plan de cette section ; soit AB la trace de ce plan (fig. 214 et 215).

On démontre, en géométrie, qu'un plan dont la trace CD est antiparallèle à AB coupe également le cône suivant un cercle ; il en est de même pour le cylindre, qui n'est d'ailleurs qu'un cône particulier dont le sommet s'est éloigné à l'infini.

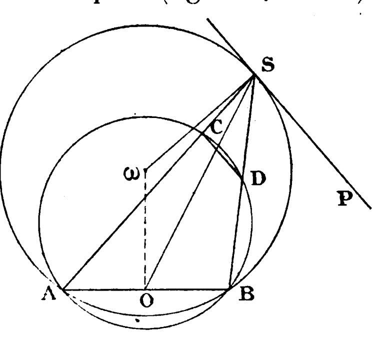


Fig. 214.

Les deux cercles AB et CD sont sur une même sphère dont le contour apparent est le cercle passant par les quatre points A, B, C, D ; ce cercle existe puisque l'on a :

$$SA.SC = SB.SD.$$

Si l'on considère, en particulier, la sphère passant par le cercle AB et le point S, dans le cas du cône, le plan P tangent à cette sphère en S (fig. 214) donne la direction des plans cycliques antiparallèles à la base AB. Cette considération permet de déterminer cette direction de plans, dans le cas du cône, sans avoir recours à une projection auxiliaire. Il suffit de déterminer le centre ω de la sphère considérée, et de mener un

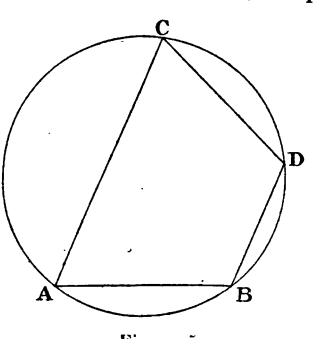


Fig. 215.

plan perpendiculaire à ωS. Ce plan, et tout plan parallèle, coupera le cône suivant un cercle.

Exemple. — Soit un cône de sommet *s* (5) ayant pour directrice dans le plan de comparaison le cercle *o* (fig. 216). Prenons comme plan vertical auxiliaire le plan de trace *os*, et rabattons-le sur le

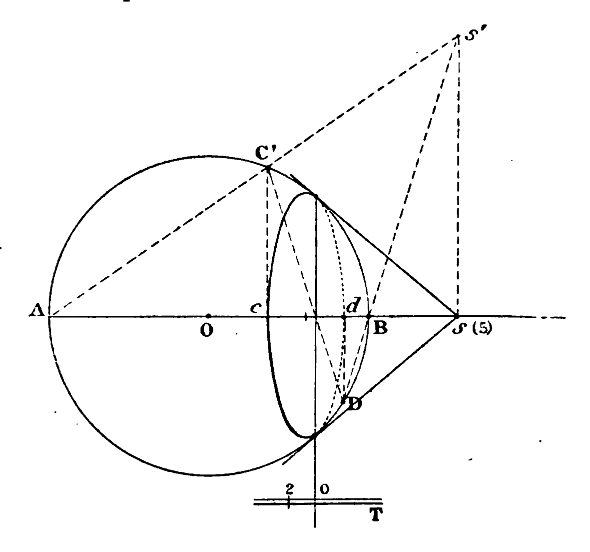


Fig. 216.

plan de comparaison. *s* se projette en *s'*. Un cercle quelconque passant par A et B, par exemple le cercle *o* lui-même, donne une corde C'D' antiparallèle à AB ; C'D' est la trace, sur le plan vertical *os*, d'un plan dont nous pouvons graduer l'échelle de pente T ; ce plan coupe le cône suivant un cercle.

Pour déterminer l'ellipse-projection, nous avons considéré ce cercle comme appartenant à la sphère dont le contour apparent serait le cercle *o* ; on voit sur la projection auxiliaire, que les deux sections par

les plans de traces AB et C′D′ sont bien sur cette sphère. La méthode habituelle fournit les axes de l'ellipse projection. Les points sur le contour apparent du cône sont précisément les points de ce contour apparent situés sur le cercle *o*, comme on le vérifie aisément.

INTERSECTION DES POLYÈDRES

L'intersection de deux polyèdres quelconques est, en général, un polygone gauche (c'est-à-dire dont tous les côtés ne sont pas dans un même plan), obtenu en prenant les intersections des faces deux à deux, ou bien l'intersection des arêtes de chacun des polyèdres avec les faces de l'autre.

On ne peut avoir de sommets que sur les arêtes. On est donc ramené à trouver des intersections de plans ou de droites avec des plans.

Intersection de deux pyramides. — Supposons d'abord que les deux bases soient dans un même plan.

Les deux pyramides sont SABCD et OEFG (fig. 217).

Joignons OS et prenons la trace θ de cette droite sur le plan commun des deux bases.

Faisons passer un plan par la droite OS et l'une des arêtes, par exemple SB. La trace de ce plan est θb qui rencontre la base EFG en deux points u et v. Joignons ov et ou. Ces droites sont dans un même plan avec SB; elles rencontrent cette arête en deux points 2 et 8 qui sont des sommets de l'intersection.

En se servant du point où θb rencontre *dc*, on obtiendrait sur *ou* et *ov* deux points qui sont communs aux surfaces des deux pyramides, mais ce ne sont pas des sommets ; ils sont situés chacun sur un côté du polygone d'intersection, mais il vaut mieux ne se servir que de la détermination des sommets.

Plans-limites. — Le premier plan auxiliaire utile est le plan R′, qui a pour trace θg. Le dernier est le plan R′′′′, qui a pour trace θc.

Toutes les arêtes de l'une des pyramides ne rencontrent pas l'autre pyramide ; ainsi l'arête S*a* ne rencontre pas le tétraèdre *oefg* ; l'arête *of* ne rencontre pas la pyramide S*abcd*.

Quand les plans-limites ne se rapportent pas à la même pyramide, comme dans le cas de l'épure, on dit qu'il y a *arrachement*. Chaque polyèdre détache un morceau de l'autre.

Ordre de jonction des points. — Nous avons vu qu'il n'y avait de sommets que sur les arêtes ; pour joindre les points ainsi obtenus dans l'ordre voulu, il faut prendre les intersections successives des faces de l'un des polyèdres avec les faces de l'autre ; afin d'éviter les erreurs, il est bon de procéder de la manière suivante, que nous allons expliquer en détail sur cet exemple.

θg, trace du premier plan auxiliaire utile, rencontre *ab* en *m*.

Supposons un mobile qui parcourt le chemin *mbmcpqcbm*, en s'arrêtant à tous les points désignés par les lettres et rebroussant chemin lorsqu'il arrive à un plan-limite relatif à l'autre pyramide.

En même temps, *en restant toujours dans le même plan auxiliaire que le mobile précédent*, un autre

mobile parcourt le chemin *gver*, rebrousse chemin en rencontrant un plan-limite relatif à la pyramide S, puis parcourt *regt* et revient en *u*.

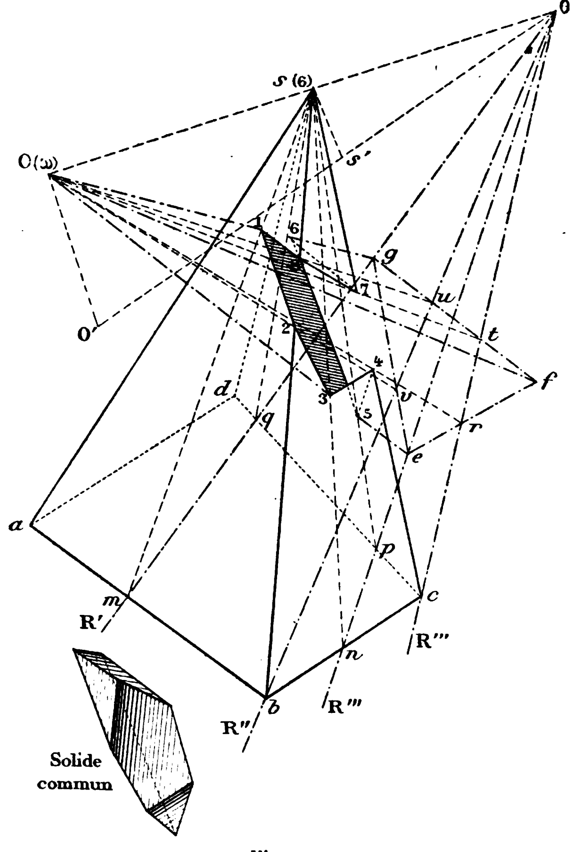


Fig. 217.

Le plan R′ de trace θ*m* donne le point 1 sur *og*; puis R″ donne le point 2 à l'intersection de *ov* avec S*b*; 3 est le point de rencontre de S*n* avec *oe*; 4, celui de S*c* avec *or*, etc.

Les points sont donc dans l'ordre des points de rencontre des droites

$$\underbrace{mbncpqcb}^{S} \quad \text{avec les droites} \quad \underbrace{gveregtu}^{O}$$

on obtient ainsi les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Nous avons représenté la pyramide quadrangulaire de sommet S *entaillée* par le tétraèdre de sommet *o*, ce qui veut dire : ce qui reste de la pyramide S lorsqu'on enlève la partie commune aux deux pyramides.

Cette partie commune, appelée *solide commun*, est représentée au-dessous.

Cas où les deux bases ne sont pas dans un même plan. — Soit π l'intersection des plans P et Q des deux bases ; les pyramides sont :

SLMNR et OABC (fig. 218).

Menons OS et prenons son intersection T avec P et son intersection U avec Q.

Faisons passer des plans par la droite OS et chacune des arêtes des deux pyramides.

Donnons-nous, par exemple, la trace UR d'un de ces plans sur Q ; la trace de ce plan sur P sera Tρ qui rencontre en *m* et *k* la base ABC.

Les droites O*m* et O*k* rencontrent RS en deux points k_1, m_2 qui sont des sommets du polygone d'intersection. On détermine ainsi, comme dans la méthode précédente, les sommets situés sur chaque arête. Le premier plan utile étant *u*N*v*T, il n'y a pas de sommets sur OB, ni sur OC.

De même, le dernier plan utile étant TAαU, il n'y aura pas de points sur SL.

Il se trouve ici que le polygone gauche se compose

de deux portions planes, l'une dans la face BOA, l'autre dans la face AOC, qui se coupent suivant *if*.

Dans ce cas, il y a **encore** *arrachement*.

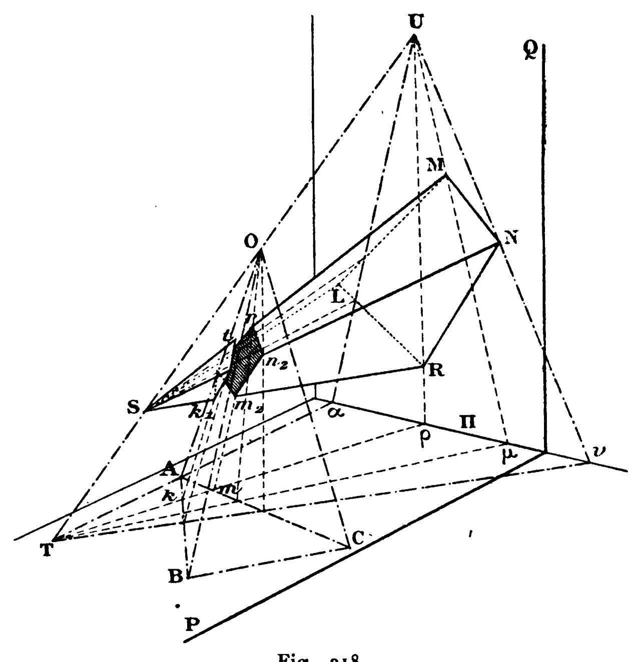


Fig. 218.

Intersection d'un prisme et d'une pyramide. — Soit un tétraèdre S*fgh* et un prisme de base *abcde*, située dans le plan horizontal ainsi que *fgh* (fig. 219).

La méthode est la même que la précédente ; on fait passer les plans auxiliaires par la parallèle aux arêtes du prisme menée par le point S.

Soit θ la trace de cette droite, par laquelle on fait passer les plans auxiliaires.

Les plans-limites ont pour trace θ*h* et θ*f*. Les sommets *f* et *h* appartiennent à la pyramide ; toutes les

arêtes de la pyramide rencontrent le prisme ; il y a un polygone d'entrée et un polygone de sortie ; on

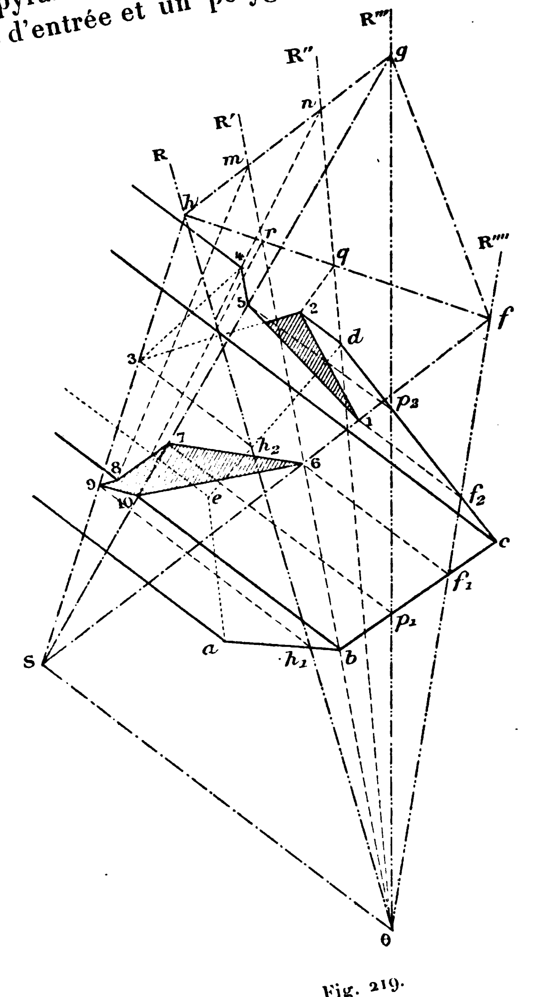


Fig. 219.

dit dans ce cas qu'il y a *pénétration* de la pyramide dans le prisme.

Les plans auxiliaires donnant des sommets ont pour traces successives θh, θb, θd, θg, θf.

Pour joindre les points, employons le même procédé que celui qui nous a servi pour l'intersection de deux pyramides.

Un mobile parcourt fqh, ngf.
Un autre mobile parcourt f_2dh_2, puis, dp_2f_2.

(Nous ne prenons pas le point r, par exemple, situé entre q et h, comme point de station du mobile, parce que ce point n'a pas de correspondant, sur le chemin de l'autre mobile, qui soit situé sur la même trace de plan auxiliaire ; le point correspondant, qui serait entre h_2 et d sur de, ne donnerait pas de sommet ; il fait partie des points dont nous avons déconseillé l'usage).

Ensuite le premier mobile parcourt

$fgmh$ ... rf ;

le second :

$f_1p_1bh_1$ et revient en bf_1.

En joignant S aux points des premières lignes, et menant par les points des secondes lignes des parallèles aux arêtes du prisme, on obtient dans l'ordre voulu les points marqués 1 2 3 4 5 1, polygone de sortie du tétraèdre dans le prisme, et 6 7 8 9 10 6, polygone d'entrée.

Nous avons représenté l'entaille faite dans le prisme par le tétraèdre, en enlevant la portion du prisme comprise à l'intérieur du tétraèdre.

Intersection de deux prismes. — Supposons encore les bases situées dans un même plan. Soient *abcd* et *efg* les deux bases (fig. 220).

Menons par un point o de l'espace des parallèles $o\alpha$ et $o\beta$ aux arêtes des deux prismes ; ces deux droites déterminent un plan dont la trace sur le plan des bases est $\alpha\beta$.

Nous allons couper par des plans auxiliaires parallèles au plan $o\alpha\beta$; ces plans, dont les traces seront

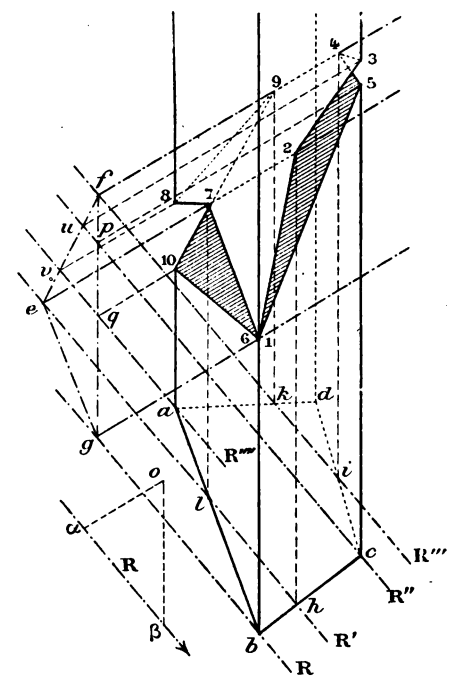


Fig. 220.

parallèles à $\alpha\beta$, donneront dans chaque prisme des parallèles aux arêtes ; en faisant passer les traces des plans auxiliaires par tous les sommets utiles des deux bases, on aura, aux points d'intersection des parallèles aux arêtes ainsi obtenues, les sommets de l'intersection.

Le plan auxiliaire mené par *d* ne rencontre pas le prisme *efg*, il n'y a donc pas de points sur l'arête aboutissant en *d*.

Supposons que la parallèle à αβ menée par *g* passe justement par le point *b* : nous aurons un *cas intermédiaire* entre l'*arrachement* et la *pénétration ;* deux sommets de l'intersection seront confondus au point d'intersection des arêtes issues de *b* et de *g* qui sont dans un même plan.

Pour joindre les points, nous avons fait parcourir aux deux mobiles les chemins :

bhcicblakab

et

geufpgevfqg.

Les arêtes ou parallèles aux arêtes qui passent par les points correspondants des deux lignes donnent les sommets dans l'ordre.

Nous avons représenté le prisme quadrangulaire entaillé par le prisme triangulaire.

OMBRES DES POLYÈDRES

Ombre propre. — *Reconnaître si une face est dans l'ombre ou éclairée.* — Pour qu'une face soit tout entière éclairée, il suffit que trois de ses points, non en ligne droite, le soient. Si l'on en prend deux seulement, ils peuvent être justement sur l'arête intersection d'une face éclairée et d'une face sombre.

Pour reconnaître si un point est éclairé, on joint ce point au point lumineux (à distance finie ou à l'infini) et on cherche les autres points d'intersection de la droite ainsi obtenue avec le polyèdre.

S'il y a un point en avant du point considéré par

rapport à la source lumineuse, le point est dans l'ombre ; dans le cas contraire, il est éclairé.

Une face étant tout entière vue, ou tout entière dans l'ombre, la ligne séparatrice de l'ombre et de la lumière sera formée par des arêtes du polyèdre. Il est facile de les déterminer.

Soit un polyèdre quelconque *abcde* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, la base *abcde* étant dans le plan horizontal ; S est le flambeau (fig. 221).

Les faces *ab*$\alpha\beta$ et *ae*$\alpha\varepsilon$ sont éclairées ; les autres faces latérales sont dans l'ombre ; pour savoir si une face est éclairée, nous menons un rayon SM aboutissant à un point M de cette face ; si ce rayon rencontre le polyèdre entre S et M, la face est dans l'ombre ; dans le cas contraire, elle est éclairée.

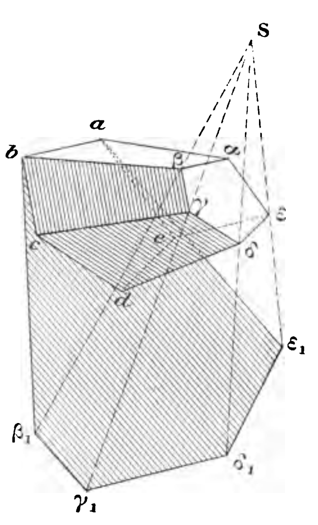


Fig. 221.

La séparation des parties éclairées et des parties obscures sera faite par le polygone *bae*$\varepsilon\alpha\beta$*b*.

Une partie éclairée peut être cachée pour l'observateur ; ici, par exemple, sur la perspective que nous avons faite du polyèdre, la face *ae*$\varepsilon\alpha$ est cachée pour l'observateur, bien qu'éclairée par le flambeau.

Ombre portée. — L'ombre portée sur un plan sera limitée par le polygone d'ombre portée par le contour polygonal qui limite l'ombre propre.

Les points qui sont dans le plan horizontal restent fixes; γ porte ombre en γ_1; β en β_1; ε en ε_1; le polygone-limite de l'ombre portée sur le plan horizontal est donc $b\beta_1\gamma_1\delta_{11}\varepsilon_1 a$. Les autres faces portent ombre à l'intérieur de ce contour.

Ombre portée par une droite sur un polyèdre. — Ce sera le polygone d'intersection du polyèdre avec le plan mené par la droite et le point lumineux (à distance finie, ou à l'infini dans une direction donnée). Sa détermination revient à celle d'une section plane; on arrêtera cette section plane aux arêtes qui séparent la partie éclairée du polyèdre de celle qui est dans l'ombre

Ombre portée par un polygone plan sur un polyèdre. — On est ramené à prendre l'intersection du polyèdre avec la pyramide ayant pour sommet le point lumineux, ou le prisme dont les arêtes sont parallèles aux rayons lumineux, la base étant le polygone donné; le problème est donc celui de l'intersection de deux polyèdres. On limite, comme précédemment, l'ombre portée aux arêtes séparatrices de l'ombre et de la lumière sur le polyèdre.

Ombre portée sur un polyèdre par un autre polyèdre. — On cherche l'intersection du second polyèdre avec le prisme ou la pyramide ayant son sommet au point lumineux, et pour base le polygone formé par les arêtes séparatrices sur le premier polyèdre. C'est encore une intersection de polyèdres.

NOTIONS SUR LES SURFACES DE RÉVOLUTION

Mode de génération. — Définitions. — Une surface de révolution est engendrée par une ligne plane ou gauche tournant autour d'un axe.

Tous les points de la courbe *génératrice* décrivent des cercles ayant leurs plans perpendiculaires à l'axe et leurs centres sur l'axe. Ce sont les *parallèles* de la surface.

Tout plan passant par l'axe est dit *plan méridien*.

L'intersection avec un tel plan est une *méridienne*.

Surface de révolution du second ordre. — Elles comprennent, en plus des cônes et cylindres, déjà étudiés :

1° *L'ellipsoïde allongé*, engendré par une ellipse tournant autour de son axe focal ;

2° *L'ellipsoïde aplati*, engendré par une ellipse tournant autour de son petit axe ; (la sphère est un cas particulier des ellipsoïdes) ;

3° *L'hyperboloïde à une nappe*, engendré par une hyperbole tournant autour de l'axe qui ne rencontre pas la courbe ;

4° *L'hyperboloïde à deux nappes*, engendré par une hyperbole tournant autour de l'axe qui passe par les sommets réels ;

5° *Le paraboloïde*, engendré par une parabole tournant autour de son axe.

Propriété fondamentale des surfaces de révolution. — Théorème. — *Le plan tangent en un point d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan du méridien qui passe par ce point.*

Soit Δ l'axe de la surface, M un point de cette surface (fig. 222).

Le plan tangent en M contient la tangente MT au parallèle du point M dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre o est sur l'axe.

La droite MT est perpendiculaire au rayon OM ;

elle est perpendiculaire à Δ, puisqu'elle est dans un plan perpendiculaire à l'axe ; elle est par suite perpendiculaire au plan méridien ΔOM et le plan tangent, qui la contient, est aussi perpendiculaire à ce plan.

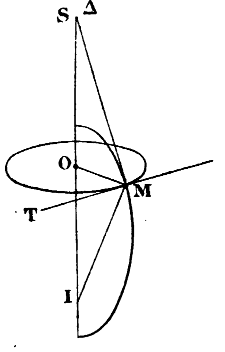


Fig. 222.

COROLLAIRE. — La normale MI à la surface en M c'est-à-dire la perpendiculaire au plan tangent en M, est dans le plan méridien ; elle rencontre donc l'axe en un point I (qui peut être à l'infini) ; on en conclut :

Les normales en tous les points d'une surface de révolution remontrent l'axe. — On peut démontrer que cette propriété est caractéristique des surfaces de révolution.

Cône circonscrit et cône des normales. — Figurons la méridienne de la surface qui passe par M ; MT est la normale à cette méridienne, MS la tangente (fig. 222).

Si l'on imagine que la méridienne tourne autour de Δ pour engendrer la surface, le point M décrivant le parallèle de centre *o*, on voit que les points I et S restent fixes.

Le cône de sommet I engendré par la normale MI est dit : *cône des normales* le long du parallèle.

Le plan MST, qui contient deux tangentes à des courbes tracées sur la surface et passant par M, est le plan tangent à la surface au point M. Les plans tangents tout le long du parallèle sont tangents au cône de sommet S, ayant pour directrice le parallèle

du point M. Ce cône de révolution est appelé *cône circonscrit le long du parallèle.*

La sphère de centre I et de rayon IM est tangente à la surface tout le long du parallèle ; c'est la *sphère inscrite.*

Ces propriétés permettent de résoudre tous les problèmes relatifs aux plans tangents aux surfaces de révolution.

Application. — Considérons l'ellipsoïde allongé engendré par l'ellipse E, située dans le plan de comparaison, tournant autour de son grand axe Δ. (fig. 223).

Etant donné la projection m d'un point de la surface, trouver sa cote et le plan tangent en ce point.

Le parallèle de M est le plan vertical mP, perpendiculaire à l'horizontale Δ.

Rabattons P sur le plan de comparaison ; le parallèle est rabattu suivant le cercle décrit sur ab comme diamètre ; le point projeté en m est rabattu sur ce cercle en m' ; mm' est la cote de M au-dessus ou au-dessous du plan de comparaison.

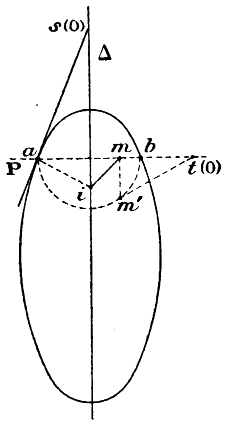


Fig. 223.

Le plan tangent est déterminé par la tangente mt (t étant le point ou la tangente en M rencontre le plan de comparaison) et le point $s(o)$ sommet du cône circonscrit le long du parallèle ; s est obtenu en mettant la tangente en a ou en b à la méridienne donnée.

Si l'on mène la normale en a à la méridienne, on

obtient en i le sommet du cône des normales : la normale en m est donc mi; en menant le plan perpendiculaire à mi au point m on obtiendrait d'une autre manière le plan tangent.

EXÉCUTION DES ÉPURES. — PROCÉDÉS PRATIQUES

Intersection d'un polyèdre et d'une sphère. — Les sections de la sphère par les faces du polyèdre sont des cercles, projetés suivant des ellipses ; on détermine les deux axes de ces ellipses, les points sur le contour apparent de la sphère et les points situés sur les arêtes du polyèdre ; on distingue ensuite les parties vues et cachées suivant la méthode indiquée plus loin.

Pour déterminer les axes des ellipses, on prend, pour chaque face, un plan vertical auxiliaire passant par le centre de la sphère et perpendiculaire aux horizontales du plan de la face considérée ; on rabat ce plan vertical sur le plan horizontal du centre, comme dans la méthode générale indiquée pour la section plane de la sphère, ce qui donne les deux axes de l'ellipse ; on obtient les points sur les arêtes en prenant l'intersection de ces droites avec la sphère.

Si le polyèdre donné est un prisme à arêtes horizontales, on voit, par ce qui précède, qu'il suffira d'un seul plan vertical auxiliaire perpendiculaire aux arêtes du prisme.

APPLICATION. — *Tétraèdre entaillé par une sphère.* (fig. 224). — Soit abc la base du tétraèdre dans le plan horizontal, s son sommet de cote σ. Soit o le centre de la sphère de cote ω ; la sphère est tangente à l'arête sa au point M projeté en m.

Les faces coupent la sphère suivant des cercles projetés suivant des ellipses. Construisons l'une d'elles en déterminant les sommets, par exemple celle qui est dans la face SAB.

Prenons le plan vertical $o\gamma$ dont la trace est perpendiculaire à *ab*, comme plan de projection et rabattons-le sur le plan horizontal de cote ω. Le point *s* se

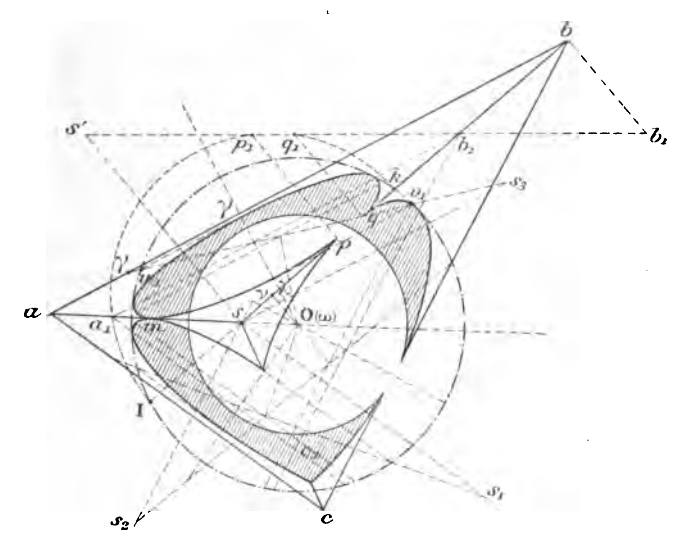


Fig. 224.

projette en s_3, tel que $\lambda s_3 = \sigma - \omega$, différence des cotes ; le point γ qui est dans le plan de projection, se projette en γ', tel que $\gamma\gamma' = \omega$; $\gamma' s_3$ est la trace du plan de la face, et le cercle *o* est la trace verticale de la sphère.

La face coupe la sphère suivant le cercle projeté en $u_1 v_1$; les points *u* et *v* sont les extrémités du petit axe de l'ellipse ; le grand axe est perpendiculaire au milieu ; sa longueur est $u_1 v_1$.

Les points sur le contour apparent de la sphère sont obtenus en coupant par le plan horizontal de cote ω, qui donne dans le tétraèdre le triangle $a_1b_1c_1$. Les intersections des côtés avec le cercle o donnent les points cherchés.

Le plan horizontal de la face de base coupe suivant un cercle.

Enfin, nous avons déterminé les points d'intersection de l'arête SB avec la sphère en coupant par le plan projetant cette arête et le rabattant sur le plan horizontal (ω). Il donne dans la sphère le cercle de diamètre IK qui coupe le rabattement $s'b_1$ de la droite sb ($ss' = \sigma - \omega$; $bb_1 = \omega$) en p_1 et q_1, projetés en p et q. Ce sont les points cherchés.

Parties vues et cachées. — Nous marquons d'abord les portions d'arêtes conservées et les arcs des ellipses-projections qui forment le contour apparent du solide conservé ; il ne reste plus qu'à voir, lorsque deux lignes se rencontrent, celle des deux pour laquelle le point, projeté en ce point de rencontre, a la plus forte cote.

Représentons, par exemple, sur l'épure précédente le solide commun à la sphère et au tétraèdre.

Traçons d'abord le contour de ce solide (fig. 225). Il se compose d'une partie $\alpha\beta$, contour apparent sphérique, de l'arc d'ellipse $\beta\gamma$, de l'arc γi d'une autre ellipse, de la portion d'arête iK de la base du tétraèdre de l'arc d'ellipse Kλ, du contour apparent sphérique $\lambda\mu$ et enfin d'un autre arc d'ellipse $\mu\alpha$ limitant le solide.

Toute cette ligne est vue.

Pour figurer le reste, prenons comme point de départ une ligne sûrement conservée et vue, par

exemple le morceau d'arête *pq*, qui est à l'intérieur de la sphère, et par conséquent, arête du solide commun.

Les arcs d'ellipse $q\mu$, $q\lambda$, *pr*, *pm* aboutissant aux points vus *p* et *q*, sont également vus ; au point *r*, nous traçons la portion d'arête conservée $r\lambda$.

L'arc *rm* est vu et conservé jusqu'en β, puisque l'arête *sa* est tangente à la sphère ; de même l'arc $m\alpha$ est vu.

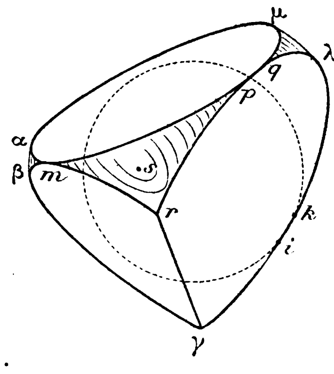


Fig. 225.

Le cercle de base inférieure est caché tout entier, le corps étant supposé solide et opaque.

Remarque. — La méthode reste la même si le polyèdre a une base dans un plan autre que le plan de comparaison ; on détermine les horizontales de chacune des faces et l'on prend des plans verticaux auxiliaires comme précédemment.

INTERSECTION D'UN POLYÈDRE ET D'UN CÔNE OU D'UN CYLINDRE

Cône ou cylindre ayant sa directrice dans le plan de comparaison, ou dans un plan parallèle. — La méthode générale consiste à couper par des plans auxiliaires passant par le sommet du cône et par le sommet de la pyramide ; pour ordonner les constructions, on procède comme dans le cas de l'in-

tersection de deux polyèdres, en ayant soin de ne pas oublier les plans limites pour le cône ou le cylindre, plans qui donnent des points où la tangente est la droite déterminée dans le polyèdre.

Il est souvent avantageux d'employer des plans verticaux auxiliaires perpendiculaires aux horizontales des faces successives du polyèdre. La face considérée, et par suite la section demandée, se projette tout entière suivant une droite ; il suffit de prendre les points d'intersection de cette droite avec toutes les génératrices du cône.

On obtient ainsi les points le plus à droite et le plus à gauche et les points sur les génératrices de contour apparent.

Si la section est hyperbolique, la méthode est très avantageuse ; on obtient les directions asymptotiques en menant par le sommet du cône le plan parallèle au plan sécant, dont on a immédiatement la trace horizontale.

Prenons comme exemple l'épure suivante.

Le point o étant le centre de la feuille, on donne : (fig. 226).

$$\text{OH} = 40 \text{ mm}$$
$$\text{HA} = \text{HB} = 45 \text{ mm}$$
$$\text{OC} = 65 \text{ mm}$$

ABC, dans le plan de comparaison, est la base d'un tétraèdre dont l'angle en S est trirectangle, S' étant au-dessus du plan ABC.

Du point ω, pris sur CH, $o\omega = 35$ mm, on décrit, dans le plan de comparaison, un cercle de rayon 35 mm ; ce cercle est la base d'un cône dont le sommet Σ se projette sur CH.

Σ a la même cote que S et il est déterminé par la

condition que le plan tangent au cône en *o* soit parallèle au plan SAB.

Intersection du cône avec les faces de SABC.

Représenter ce qui reste du tétraèdre quand on enlève la partie intérieure au cône.

Tangentes aux points sur AB et sur SC.

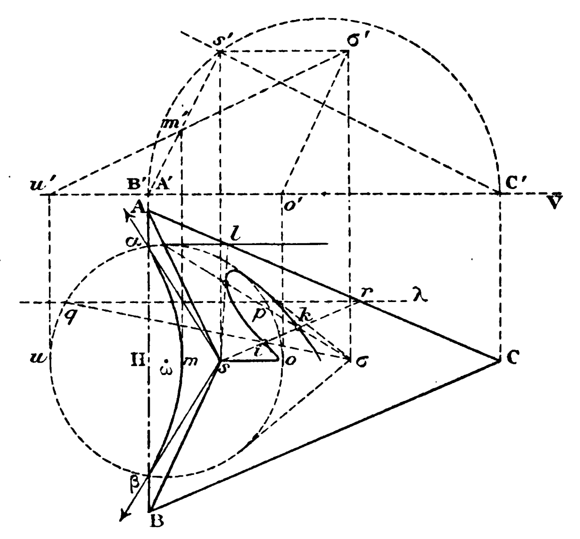


Fig. 226.

On sait que la projection *s* du sommet est au point de concours des hauteurs de ABC.

Projetons sur le plan vertical V perpendiculaire à AB.

s se projette en *s'*, sur le cercle décrit sur A'C' comme diamètre.

Une des génératrices de contour apparent vertical du cône, trace d'un plan tangent vertical parallèle, d'après les données, à *s'*A' est la droite *o'σ'*, *σ'* étant sur la parallèle à V menée par *s'*.

Le plan SAB, perpendiculaire au plan V, a pour trace $s'A'$.

La section par ce plan est une parabole dont on a le sommet en m', projeté en m ; on a de plus les deux points α et β où AB rencontre la base du cône ; les tangentes en α et β sont $s\alpha$ et $s\beta$ puisque la sous-tangente est le double de l'abscisse et que $m\text{H} = ms$, par suite des données.

La parabole est donc déterminée.

Pour les autres sections symétriques du cône par les faces SAC et SBC, on pourrait également projeter sur un plan perpendiculaire à AC, par exemple.

Il est préférable, dans ce cas, d'employer la méthode générale.

La droite des sommets rencontre le plan des bases à l'infini ; les traces des plans auxiliaires passant par SΣ sont parallèles à $s\sigma$; soit λ l'une de ces traces.

Le plan correspondant coupe le cône suivant deux génératrices σp, σq et la face SAC suivant la droite sr, ce qui donne deux points i et k de l'ellipse d'intersection ; on a facilement les tangentes en ces points.

On obtiendrait les points sur les contours apparents en coupant par les plans auxiliaires passant par les contacts des tangentes au cercle menées de σ.

Le plan limite de trace l, tangente au cercle, donne un point où la tangente est la droite sl.

L'épure se termine sans difficulté.

Remarque. — Dans le cas d'un cylindre, le centre de la section est à l'intersection avec la parallèle aux génératrices menée par le centre d'une directrice quelconque.

Les points sur les génératrices de contour appa-

rent déterminent un diamètre, qui divise en deux parties égales les cordes parallèles aux génératrices ; soit *ab* ce diamètre (fig. 227) ; en déterminant le point *c* situé sur l'une des génératrices projetées suivant l'axe, et prenant le symétrique *d*, on a deux points où la tangente est parallèle à *ab* ; l'ellipse est inscrite dans le parallélogramme ainsi formé, ce qui permet de la tracer avec suffisamment d'exactitude.

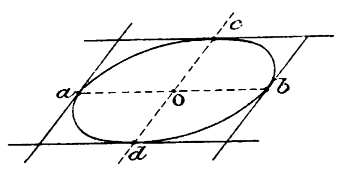


Fig. 227.

Cône ou cylindre de révolution (axe quelconque) et polyèdre. — On pourrait appliquer la méthode générale en prenant pour directrice, comme nous l'avons montré précédemment, une ellipse projetée horizontalement suivant un cercle. (Directrice de Monge.)

Il est souvent plus simple d'employer des plans verticaux auxiliaires perpendiculaires aux horizontales des faces du polyèdre.

Exemple. — Soit un cône de révolution d'axe *s* (4) *d* (o), circonscrit à une sphère donnée de centre *d*.

On demande de trouver l'intersection du cône avec le prisme de base *abc*, dans le plan de comparaison, les arêtes ayant la direction *ag*. Pour trouver l'intersection avec la face *acg*, par exemple, prenons pour plan vertical auxiliaire le plan *d*V, perpendiculaire à l'horizontale *ac* ; la trace du plan de la face est Q′ obtenue à l'aide de α', projection de α (fig. 228).

Le point *s* se projette en *s*′ à la distance 4 de *d*V ; la sphère ne change pas ; le contour apparent du

cône sur le nouveau plan se compose des deux tangentes $s'i'$ et $s'k'$ projetées horizontalement suivant si et sk.

La trace Q' les rencontre en u' et v' projetés en u

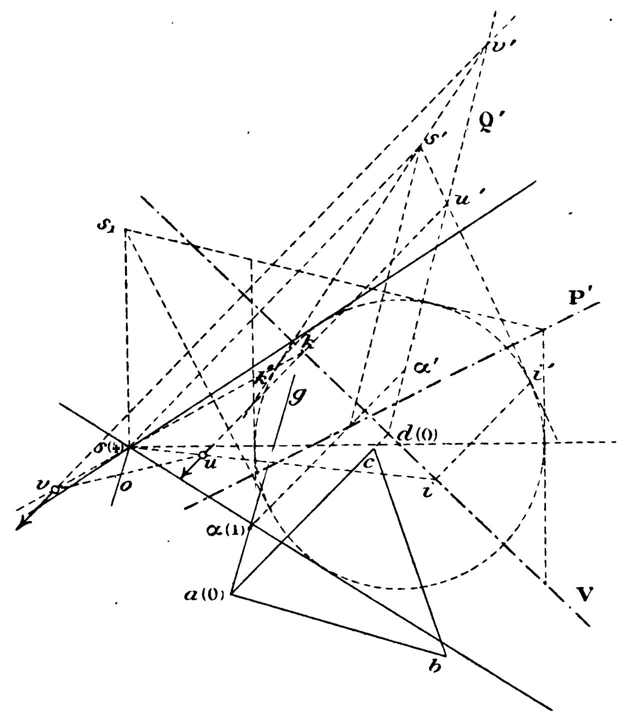


Fig. 228.

et v ; ce sont deux points où la tangente est horizontale et parallèle à ac, par conséquent.

Le milieu o de uv est centre.

Dans le cas de la section elliptique, on mènerait par o une parallèle à ces tangentes ; en considérant la droite du plan sécant ainsi projetée et prenant l'intersection avec le cône, on obtiendrait deux points

où la tangente est parallèle à *uv*, c'est-à-dire un parallélogramme circonscrit à l'ellipse.

Dans le cas de la figure, le plan parallèle à Q′ mené par *s′* coupe le cône suivant deux génératrices distinctes : la section est une hyperbole, dont on a facilement les directions asymptotiques. En menant par *o* des parallèles, on a les asymptotes, ce qui permet de tracer l'hyperbole.

Remarque. — Pour appliquer la méthode générale avec une directrice de Monge, rabattons le plan vertical *sd* ; *s* vient en s_1 ; menons de ce plan les tangentes au contour apparent de la sphère *d* qui ne change pas ; l'intersection avec le cylindre vertical circonscrit comprend la section par le plan P′, qui donne une ellipse projetée horizontalement suivant le cercle *d*, dont on pourrait se servir pour appliquer la méthode générale.

La méthode précédente donne plus simplement le centre, et par suite les asymptotes.

Cylindre à génératrices horizontales et polyèdre. — Il suffit d'un seul plan vertical auxiliaire perpendiculaire aux génératrices du cylindre ; on a ainsi toute la projection de l'intersection ; on peut en relever autant de points qu'il est nécessaire avec leurs tangentes.

Exemple. — Soit un cylindre de révolution tangent au plan de comparaison, déterminé par son contour apparent, et un tétraèdre *sabc*, dont la base *abc* est dans le plan de comparaison.

Sur le plan vertical auxiliaire V, l'intersection du cylindre et du tétraèdre est projetée tout entière sur le cercle ω. *s* est projeté en *s′*.

Soit m' un point considéré comme appartenant à la face SBC. Menons en m' la tangente $u'm'v'$ au cercle ; u' et v' se projettent en u et v et m' en m ; uv est la

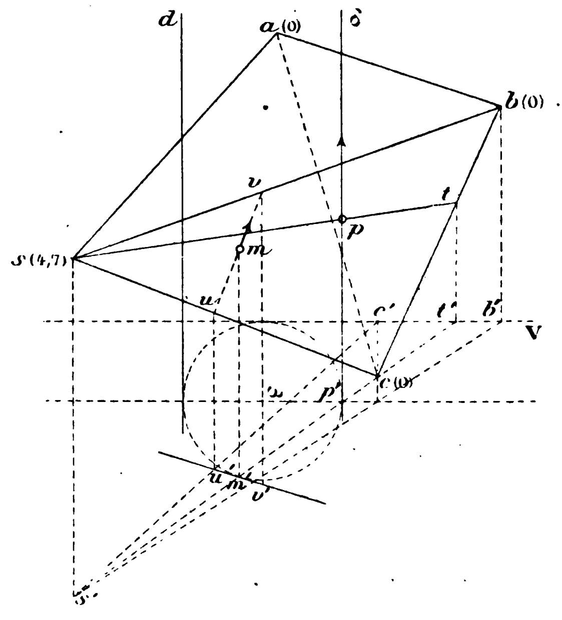


Fig. 229.

tangente en m, puisque cette droite est à la fois dans le plan sécant et dans le plan tangent.

Les points sur les contours apparents sont obtenus en coupant par le plan $s'p'$, par exemple, qui donne dans le tétraèdre la droite $s't'$, st ; le point cherché est le point p ; en ce point la tangente est la génératrice δ.

SURFACES TOPOGRAPHIQUES

On désigne ainsi des surfaces sans contours géométriquement définis, telles que celles qui constituent le relief du sol.

Pour les représenter, on emploie un procédé analogue à celui qui est en usage pour le plan en géométrie cotée. Les sections de la surface par des plans horizontaux successifs équidistants, par exemple de 1 mètre, seront des lignes dont tous les points auront la même cote, appelées pour cette raison *lignes de niveau*. Une surface topographique sera ainsi définie par les projections cotées de ses lignes de niveau.

Coupe ou profil de la surface. — On appelle coupe par le plan vertical P, ou profil de la surface suivant P, l'intersection de la surface avec le plan vertical P.

Pour déterminer la coupe, rabattons le plan P sur le plan horizontal. Les points m_3, m_4,..., etc., sont rabattus à des distances égales à leurs cotes μ_3, μ_4,..., etc. (fig. 230).

On obtient approximativement la coupe en joignant par une ligne continue les points ainsi obtenus.

La cote d'un point de la surface projeté en l sur P est approximativement $l\lambda$.

Si l'on veut un point de cote 4,3 par exemple, il suffit de mener une parallèle à P à cette distance ; on obtient en ρ projeté en r le point demandé.

Si l'on prend le point de même cote 4,3 sur la coupe par un autre plan vertical P_1, puis par un

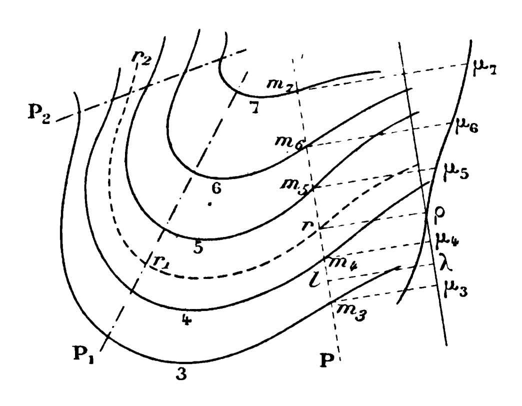


Fig. 230.

autre P_2, etc., on obtient, en joignant les points r, r_1, r_2,..., une courbe de niveau de cote voisine de 4,3. C'est ce qu'on appelle une *courbe intercalaire*. Pour tracer ces courbes, on a soin de prendre les profils P, P_1, P_2,... aussi peu obliques que possible sur la direction générale des lignes de niveau, afin d'avoir une approximation plus grande.

Pente d'une ligne tracée sur une surface topographique. — Soit un élément de ligne mp compris entre deux lignes de niveau consécutives n_2 et n_1 (fig. 231) ; la pente de la ligne mp, considéré comme étant sur la surface, est :

$$\tan g\ \alpha = \frac{mm'}{mp} = \frac{1}{mp} = \frac{1}{i}$$

(mm' étant l'unité du dessin).

On pourrait ainsi considérer la pente de chaque élément de ligne comprise entre deux lignes de niveau consécutives : par exemple, pour la ligne *ad*, prendre la pente de *ab*, de *bc*, de *cd* ; la moyenne donnerait la pente moyenne de la ligne *abcd*.

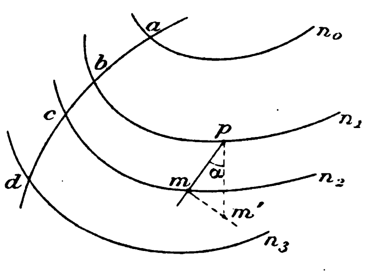


Fig. 231

Si la ligne *ad* est telle que la droite *ad* puisse être considérée comme tracée sur la surface, la pente est alors simplement :

$$p = \frac{h_d - h_a}{ad},$$

h_d et h_a étant les cotes des lignes de niveau des points *a* et *d*.

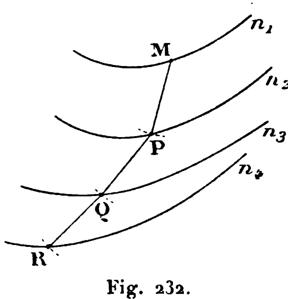


Fig. 232.

Lignes d'égale pente. — Pour qu'une ligne soit d'égale pente, il suffit que les intervalles *ab*, *bc*, *cd*, compris entre deux lignes de niveau consécutives, soient égaux.

On peut donc aisément faire passer, par un point donné, sur une surface topographique, une ligne d'égale pente donnée *p* (fig. 232).

Soit i l'intervalle donné par $i = \frac{1}{p}$.

Partons du point M et prenons

$$MP = i.$$

Puis, du point P menons $PQ = i$.

De même, à partir de Q, prenons $QR = i$, et ainsi de suite ; la ligne MPQR est telle que tous ses éléments ont la pente p.

Lignes de plus grande pente. — La formule $p = \frac{1}{i}$ montre que la pente d'une ligne tracée sur la surface topographique sera maximum quand i sera minimum.

L'élément mp, normal à la courbe de niveau n_2, est tel que $mp = i$ est minimum (fig. 233) ; il aura une pente plus grande que l'élément oblique mp'.

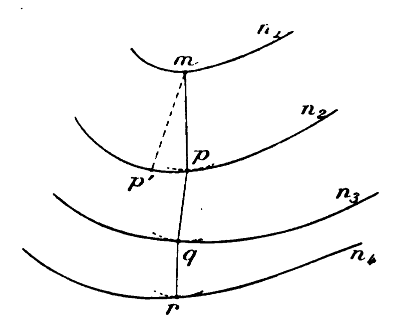


Fig. 233.

De même les éléments pq normal à n_3, qr normal à n_4, auront la pente la plus grande.

mpqr est donc une ligne de plus grande pente de la surface.

Si l'on trace des courbes de niveau intercalaires, la projection *mpqr* de la ligne de plus grande pente devra toujours être normale à toutes ces courbes ; on obtient donc la projection d'une ligne de plus grande pente en menant une ligne qui coupe à angle droit les lignes de niveau.

La tangente à la courbe de niveau étant horizontale, la tangente à la ligne de plus grande pente dans l'espace la coupe à angle droit comme en projection.

Intersection de deux surfaces topographiques. — On prend les intersections des lignes de niveau de même cote, en prenant au besoin des courbes intercalaires.

EXERCICES

ET

QUESTIONS D'EXAMEN

---

1. Passer d'une position AB d'une droite à une position A_1B_1 au moyen d'une rotation autour d'un axe convenablement choisi.

(Prendre pour axe l'intersection des plans menés perpendiculairement à A_1A_1 et BB_1 par les milieux de ces segments).

2. Une droite s'appuie sur deux droites données non dans un même plan, en restant parallèle à un plan donné ; trouver le lieu des points qui divisent la droite dans un rapport donné.

(Mener une droite parallèle au plan donné s'appuyant sur les deux droites ; mener un plan parallèle aux deux droites par le point de la droite précédente, qui la divise dans le rapport donné ; ce plan contient le lieu demandé ; projeter la figure sur ce plan ; on trouve comme lieu une droite). *Deux solutions.*

3. Trouver et construire le lieu du milieu d'une droite de longueur constante qui s'appuie sur deux droites orthogonales non situées dans un même plan.

4. Trouver le chemin minimum pour aller d'un point M à un point Q en passant par un point d'un plan donné (Prendre le symétrique M′ de M par rapport au plan ; joindre M′Q ; prendre l'intersection de M′Q avec le plan donné).

5. Étant donnés un plan et un segment de droite en dehors de ce plan, trouver le lieu des points du plan d'où l'on voit le segment sous un angle droit.

6. Trouver sur une droite un point tel que la somme des distances de ce point à deux plans donnés P et Q soit une longueur donné *d* (Le lieu des points de l'espace, dont la somme des distances aux deux plans est égale à *d*, se compose de plans dont on prend les intersections avec la droite).

Trouver le minimum de *d* (Condition de possibilité du problème).

7. Construire un trièdre connaissant une face et la droite lieu des points équidistants des trois faces.

8. Construire un trièdre connaissant une face, un dièdre adjacent et la droite suivant laquelle se coupent les plans menés par les arêtes perpendiculairement aux faces opposées.

9. Construire un trièdre connaissant une face, un dièdre adjacent et l'axe d'un cône de révolution contenant les trois arêtes.

Même problème connaissant une deuxième face au lieu du dièdre adjacent.

10. Construire un trièdre connaissant une face et une sphère inscrite dans le trièdre.

11. Construire un trièdre connaissant une face, une sphère tangente aux trois arêtes et un dièdre adjacent à la face.

Même problème connaissant le dièdre opposé à la face au lieu d'un dièdre adjacent.

12. Construire un trièdre connaissant une face, une sphère tangente aux trois arêtes, sachant que la troisième arête cherchée fait avec un plan donné un angle donné.

13. Projeter un cube suivant un hexagone régulier.

14. Construire un parallélipipède sur trois droites non situées deux à deux dans un même plan.

15. Mener par une droite un plan coupant un trièdre suivant un triangle rectangle.

16. Plus courte distance de deux points sur la surface d'un trièdre donné.

17. Plus courte distance de deux points sur la surface d'un cylindre ou d'un cône de révolution.

18. Construire les projections d'un parallélipipède connaissant les arêtes et leurs angles. (On se donnera le plan d'une face et une arête dans ce plan.)

19. Construire un cube connaissant son arête et sachant que trois arêtes issues d'un même sommet passent par trois points donnés.

Faire l'épure en prenant les trois points dans un plan horizontal.

20. Étant donnés un plan et la projection horizontale d'un point, trouver sa cote, sachant qu'il est à une distance donnée du plan.

Généralisation. — Trouver sur une droite un point à une distance donnée d'un plan donné.

21. Mener dans un plan donné, par un point de ce plan, une droite faisant avec un plan donné ou avec une droite donnée un angle donné.

22. Mener par un point un plan perpendiculaire à deux plans donnés.

23. Étant donnés deux points et une droite, déterminer sur la droite un point à égale distance des deux points donnés.

Généralisation. — Trouver sur la droite un point dont le rapport des distances aux deux points soit donné.

24. Étant donnés deux droites et un point, mener par le point une droite rencontrant l'une des droites données et faisant avec les deux droites des angles égaux.

25. Déterminer deux plans connaissant deux horizontales de même cote, la projection de leur intersection et l'angle des deux plans.

26. Projection d'un cube connaissant les projections de l'une de ses arêtes et la projection horizontale d'une autre arête.

27. Mener par quatre points des plans parallèles équidistants.

28. Construire un trièdre trirectangle connaissant le sommet et les projections horizontales des trois arêtes.

29. Amener par rotation autour d'axes passant par son sommet un tétraèdre dans une position d'équilibre.

30. Construire un tétraèdre connaissant sa base et le point d'intersection des plans bissecteurs des dièdres.

31. Construire un tétraèdre connaissant trois arêtes concourantes et le centre de la sphère circonscrite.

32. Étant donné un cône de révolution dont l'axe est vertical et une génératrice de ce cône, déterminer une seconde génératrice faisant avec la première un angle donné. Cela donne la solution du problème suivant :

Étant donné un cône de révolution dont l'axe est vertical et une droite, mener par cette droite un plan qui coupe le cône suivant une hyperbole dont les asymptotes fassent entre elles un angle donné.

33. Déterminer un tétraèdre ABCD connaissant les sommets A et B, la plus courte distance des arêtes opposées AB et CD, les longueurs des arêtes AC et BC, et la direction de l'arête CD.

34. Étant donné un cône de révolution dont l'axe est horizontal, lui mener un plan tangent de pente donnée.

35. Faire passer par une droite un plan dont la trace horizontale fasse avec la droite un angle donné.

36. Étant donnés une sphère et deux plans la coupant suivant deux petits cercles, déterminer le plan d'un grand cercle tangent aux deux petits cercles.

37. Construire un cône de révolution de sommet donné tangent à une sphère en un point donné, et d'angle au sommet donné.

38. Construire un cylindre de révolution tangent à une droite donnée en un point donné et de rayon donné, connaissant la direction des génératrices.

39. Mener par un point une droite qui rencontre un cercle et une droite non située dans le plan du cercle.

40. Mener par un point une droite tangente : { à deux cônes,
à deux cylindres.

Même problème, le point étant à l'infini dans une direction donnée, c'est-à-dire mener une droite parallèle à une direction donnée tangente à deux cônes ou à deux cylindres.

41. Mener une droite tangente à un cône passant par un point donné et rencontrant une droite donnée.

42. On donne deux droites qui se coupent : mener par l'une d'elles un plan qui fasse un angle donné avec l'autre.

43. Trouver un point lumineux tel que l'ombre portée par une sphère donnée sur un plan horizontal soit une parabole de foyer donné.

44. Construire un cône de révolution d'angle au sommet donné et tangent à deux sphères, le sommet donné étant dans un plan tangent aux deux sphères (Prendre ce plan tangent pour plan horizontal).

45. Mener par une droite un plan coupant une sphère donnée suivant un cercle de rayon donné.

46. Déterminer une sphère de rayon donné tangente à un cône de révolution donné et dont le centre soit sur une droite.

(Faire l'épure, l'axe du cône étant donné vertical).

47. Construire un cylindre de révolution, connaissant son axe et sachant qu'il est tangent à une sphère donnée ou à un cône de révolution donné, ou à un cylindre de révolution donné.

48. Étant donnés deux points et un cercle par son plan, son centre et son rayon, déterminer sur le cercle les points dont le rapport des distances aux deux points donnés soit connu.

49. Construire un cylindre de révolution de rayon donné, tangent à deux sphères et dont les génératrices soient connues en direction.

50. Construire un cylindre de révolution passant par un point et tangent à deux plans, l'un vertical, l'autre horizontal.

51. Mener par un point une droite passant à des distances données d'un point et d'une droite.

(Faire l'épure en supposant la droite horizontale).

52. Déterminer une sphère de rayon donné tangente à une droite en un point et passant par un point donné.

53. Déterminer une sphère passant par deux points et tangente à une droite en un point donné.

54. Déterminer une sphère tangente à quatre arêtes d'un tétraèdre, dont trois issues du même sommet.

55. Etant donné un tétraèdre ABCD, construire une sphère tangente aux quatre arêtes AB, BC, AC, CD.

56. Déterminer une sphère passant par trois points et tangente à une sphère.

(Faire passer une sphère par les trois points ; déterminer l'intersection du plan des trois points avec le plan radical, et mener par cette droite des plans tangents à la sphère).

Faire l'épure en prenant les trois points dans le plan horizontal. Résoudre le même problème par inversion.

57. Déterminer une sphère passant par deux points et tangente à deux sphères.

58. Déterminer une sphère tangente à quatre sphères (On ramène le problème à un autre qu'on traite par inversion. Mener par un point une sphère tangente à trois sphères).

59. Déterminer une sphère passant par deux

points, tangente à un plan et à une droite, cette droite rencontrant la droite qui joint les deux points donnés.

60. Sphères tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche ABCD.

Montrer qu'il faut : $AB + CD = BC + AD$. Soient α, β, γ, δ les contacts.

Démontrer la relation $\frac{A\alpha}{B\alpha} \cdot \frac{B\beta}{C\beta} \cdot \frac{C\gamma}{D\gamma} \cdot \frac{D\delta}{A\delta} = 1$, qui prouve que $\alpha\beta\gamma\delta$ sont dans un même plan. En conclure que le lieu des centres des sphères demandées est l'axe du cercle passant par les quatre points $\alpha\beta\gamma\delta$.

TABLE DES MATIÈRES

ANGLES

SPHÈRE

CONES ET CYLINDRES

CONES ET CYLINDRES DE RÉVOLUTION

TRIÈDRES

POLYÈDRES

SECTIONS PLANES DES CONES ET CYLINDRES

SURFACES TOPOGRAPHIQUES

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

Paris. — Imp. E. CAPIOMONT et Cie, rue de Seine, 57.




JUN 2 1919

